ØVELSESVEJLEDNING · FYSIK OG MATEMATIK · STX / HTX

Månens bane ud af tre fotografier

Fra pixels til baneelementer — en måling eleverne kan gennemføre med lommeregner

Michael H. Grant · Sostrup Slot, Djursland

---

*Denne vejledning indeholder tre dele: en **lærervejledning** med læringsmål, tidsforbrug og faldgruber, en **elevvejledning** i seks trin, og en **fuldt gennemregnet eksempelopgave med facit**. Øvelsen bygger på tre fotografier af Månen, taget med et amatørteleskop i maj 2026. Eleverne bestemmer Månens afstand, dens fasevinkel, dens plads i banen — og til sidst hele baneellipsen og omløbstiden. Der kræves ingen astronomisk software; en lommeregner rækker, og et CAS-værktøj gør sidste trin lettere.*

Del 1 — Lærervejledning

Formål

Eleverne gennemfører en fuldstændig måling: fra en rå observation (en radius i pixels) til et videnskabeligt resultat (Månens halve storakse og omløbstid), som de selv kan sammenligne med facit. Undervejs bruges trigonometri, retvinklede og skæve trekanter, et lineært ligningssystem og Keplers love — alt sammen på ét og samme datasæt.

Det pædagogiske omdrejningspunkt er, at **ingen af trinene er svære**, men at de tilsammen udgør en rigtig måling. Eleverne oplever, at astronomiske størrelser ikke er noget, man slår op, men noget man kan regne sig frem til.

Fag, niveau og placering

	Anvendes til	Niveau
Fysik	Gravitation, Keplers love, vinkelmål, måleusikkerhed	B og A
Matematik	Trigonometri, 3×3 lineært ligningssystem, keglesnit i polære koordinater	B og A
Tværfagligt	SRP, SRO, studieretningsprojekt fysik + matematik	—

Øvelsen kan bruges i tre skæringer: som ren fysikøvelse (del A–C plus Keplers 3. lov), som ren matematikøvelse (del D, hvor data blot er givet), eller som fælles forløb, hvor de to fag mødes i del D–E. Del D er den matematisk mest tilfredsstillende: keglesnittets polære ligning omskrives til noget lineært, og tre punkter giver derfor en entydig løsning.

Forudsætninger

- **Fysik:** vinkelmål (grader, bueminutter, buesekunder), Keplers tre love, begrebet halve storakse og excentricitet.
- **Matematik:** sinus og cosinus i vilkårlige trekanter, radianer, løsning af 3×3 lineært ligningssystem (i hånden eller med CAS), ellipsens ligning.
- **Ingen forudsætninger** i astronomi ud over, at Månen går i bane om Jorden og belyses af Solen.

Tidsforbrug og materialer

To moduler à 90 minutter, eller ét modul plus hjemmearbejde. Del A–C kan klares på ét modul; del D–F på det næste.

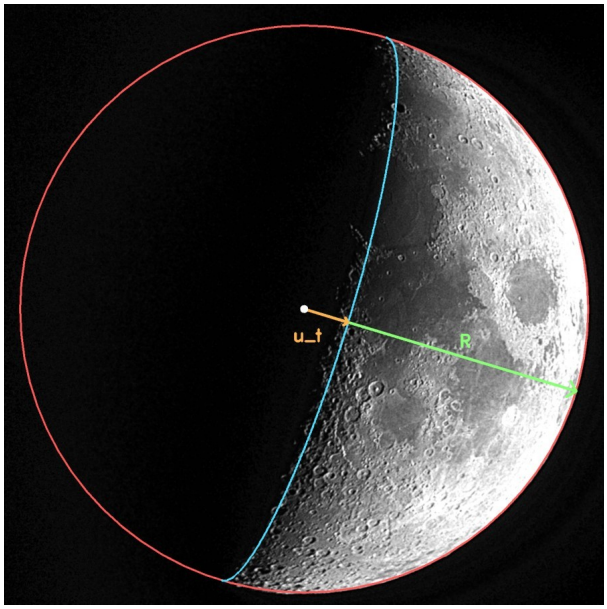
- **Datatabellen** i elevvejledningen er alt, hvad der kræves. Øvelsen kan gennemføres med papir og lommeregner.
- **CAS eller regneark** anbefales til del D, men 3×3-systemet kan også løses i hånden ved substitution.
- **Originalbillederne** kan hentes fra artiklen på nettet (adresse sidst i vejledningen), hvis man vil lade eleverne foretage deres egne målinger i et billedbehandlingsprogram. Det er en god udvidelse, men ikke nødvendigt.

Målekædens fysik — overblik til underviseren

Hele øvelsen hviler på, at ét billede af Månen indeholder to uafhængige geometriske oplysninger:

- **Randen** er projektionen af en kugle, altså en cirkel. Radius i pixels gange pladeskalaen giver den tilsyneladende halvdiameter, og deraf afstanden.
- **Terminatoren** — skyggegrænsen — er projektionen af en storcirkel, altså en ellipse med samme centrum og samme store halvakse som randen. Dens lille halvakse giver fasevinklen, og fasevinklen giver Månens vinkelafstand fra Solen.

Bemærk, at begge målinger er skalafri: de afhænger kun af forhold mellem længder i billedet. Der kræves derfor ingen viden om, hvor teleskopet pegede hen. Det er øvelsens pointe, og den er værd at fremhæve for eleverne.



Figur 1. Det, eleverne skal måle. Rød: randens cirkel med radius R. Cyan: terminatoren. Grøn pil: R, målt fra skivens centrum til den lyse rand. Blå pil: u_t, den signede afstand fra centrum til terminatorens skæring med samme akse. Fortegnet er positivt mod den lyse rand.

Faldgruber

- **Grader og radianer.** Den klassiske. Buesekunder skal divideres med 3600, og lommeregneren skal stå i grader — eller alting skal laves om til radianer. Lad eleverne kontrollere, at $\sin(0{,}2654°) \approx 0{,}00463$ og ikke noget helt andet.
- **Fortegnet på u_t.** Positivt mod den lyse rand. En segl har $u_t > 0$ og dermed $\cos i < 0$, altså $i > 90°$. Er Månen mere end halv, er $u_t < 0$. Mange elever glemmer fortegnet og får en fase, der er spejlvendt.
- **Topocentrisk og geocentrisk afstand.** Vinkeldiameteren måler afstanden fra observatøren, ikke fra Jordens centrum. Forskellen er op til 6378 km, altså 1,7 %, og skal med. Det er en fin lejlighed til at diskutere, hvornår en korrektion er nødvendig.
- **Ligningssystemet i del D.** Løs det med $1/r$ som højreside, ikke r. Eleverne kommer ofte til at opstille systemet for r og undrer sig over, at det ikke er lineært.
- **Vinklen ϖ.** Brug en arctan2-funktion eller kontrollér kvadranten. Med $B > 0$ og $C > 0$ ligger ϖ i første kvadrant, men det gælder ikke generelt.

Differentiering

Niveau	Omfang	Forventet resultat
Minimum	Del A og B for én nat	Måneafstanden og fasen på én dato
Kerne	**Del A–E for alle tre nætter**	**a, e, ϖ og T for hele banen**
Udvidelse	Del F plus egne målinger i billederne	Vurdering af usikkerhed og af tolegememodellen

Til de hurtige: lad dem undersøge, hvor følsomt resultatet er. Ændrer man λ for én nat med 2° — svarende til usikkerheden på terminatormålingen — hvor meget flytter a sig så? Det er et rigtigt fejlanalyse-spørgsmål, og svaret er overraskende stort.

Vurderingskriterier

- **Regneteknik:** korrekt håndtering af vinkelmål, korrekt opstilling og løsning af ligningssystemet.
- **Fysisk forståelse:** kan eleven forklare, hvorfor randen giver afstanden og terminatoren giver retningen?
- **Kritisk sans:** forholder eleven sig til afvigelsen fra facit, og kan afvigelsen tilskrives noget bestemt?

Det sidste punkt er det vigtigste. Resultatet rammer inden for cirka en procent, og det er godt — men ikke perfekt, og det er ikke tilfældigt. En del af afvigelsen skyldes måleusikkerhed på terminatoren; en anden del skyldes, at Månens bane slet ikke er en ren ellipse. Se del F.

Del 2 — Elevvejledning

I skal bestemme Månens bane om Jorden ud fra tre fotografier. I får ikke at vide, hvor teleskopet pegede hen — kun hvad der kan måles på selve måneskiven. Alligevel kan I nå frem til banens størrelse, dens form, dens orientering og Månens omløbstid.

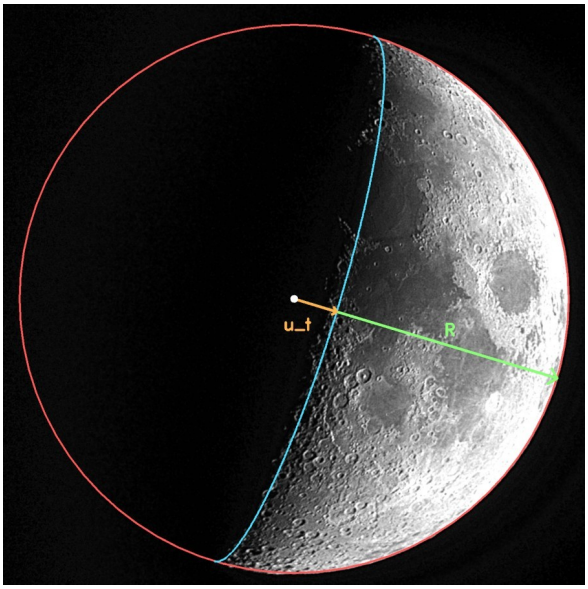
Baggrund

Billederne er taget fra Sostrup på Djursland med et teleskop med 450 mm brændvidde og en sensor med 2,9 µm store pixels. Det giver en fast pladeskala:

$$s = R_{\mathrm{px}} \cdot 1{,}3293''$$

Et fotografi af Månen indeholder to størrelser, I kan måle:

- **Randens radius R** i pixels — skivens ydre kant. Den giver afstanden til Månen.
- **Terminatorens afstand u_t** fra skivens centrum, målt langs aksen mod den lyse rand og med fortegn. Den giver fasevinklen, altså vinklen Sol–Måne–Jord.



Figur 1. De to størrelser, I skal bruge. R er den grønne pil, u_t den blå. Fortegnet på u_t er positivt mod den lyse rand — som her, hvor Månen er mindre end halv.

Data

Målingerne er allerede foretaget for jer. Vil I selv måle, kan billederne hentes fra adressen sidst i vejledningen.

Nat (UTC)	R (pixels)	u_t (pixels)	Højde h	λ☉
19/5 2026 21:03:40	744,17	+543,1	15,61°	58,895°
22/5 2026 21:16:08	718,69	+116,7	25,63°	61,790°
25/5 2026 22:02:05	688,31	−295,7	20,05°	64,704°

Højden h er Månens højde over horisonten, aflæst på teleskopet. λ☉ er Solens ekliptiske længde, som kan slås op i enhver almanak. Brug desuden:

- **Månens radius:** R(Måne) = 1737,4 km
- **Jordens radius:** R⊕ = 6378,1 km
- **Gravitationsparameteren:** μ = G(M(Jord) + M(Måne)) = 403 503 km³/s²

Del A — Fra pixels til kilometer

1. Regn randens radius om til en vinkel: den tilsyneladende halvdiameter s. Husk at buesekunder skal divideres med 3600 for at give grader.
2. Brug, at Månens radius ses under vinklen s fra observatøren:

$$\sin s = \frac{R_m}{\Delta}, \qquad R_m = 1737{,}4 \text{ km}$$

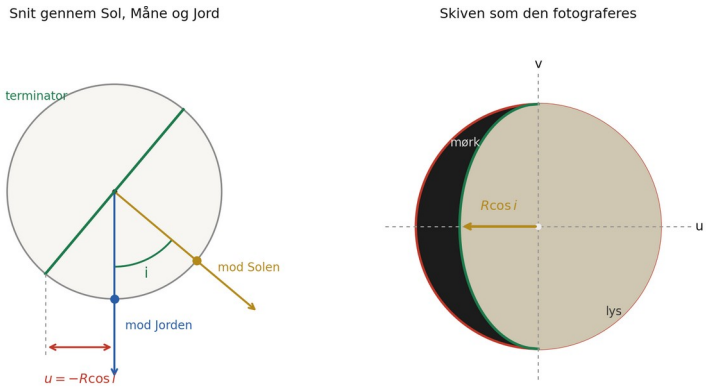
3. Δ er afstanden fra jer, ikke fra Jordens centrum. Regn om til den geocentriske afstand r med cosinusrelationen:

$$r^2 = \Delta^2 + R_\oplus^2 + 2\,\Delta R_\oplus \sin h$$

4. Gør det for alle tre nætter. Kommenter: hvor stor er forskellen mellem Δ og r, og hvorfor er den størst, når Månen står lavt?

Del B — Fra terminator til fasevinkel

Terminatoren er den storcirkel på Månen, hvor Solen står præcis i horisonten. Set fra Jorden projicerer den ned på skiven som en ellipse med samme centrum og samme store halvakse som randen, og med den lille halvakse R·|cos i|, hvor i er fasevinklen Sol–Måne–Jord.



Figur 2. Til venstre snittet gennem Sol, Måne og Jord. Til højre den samme storcirkel, som den fotograferes: en ellipse. Skæringen med faseaksen ligger i afstanden Rcos i fra centrum — på den mørke side, når Månen er mere end halv.

5. Bestem fasevinklen af:

$$\cos i = -\frac{u_t}{R}$$

6. Beregn den oplyste brøkdel og kontrollér mod billedet:

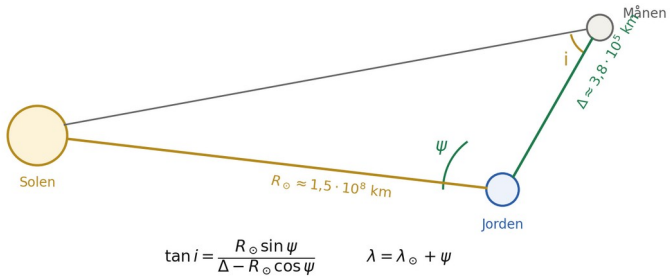
$$k = \frac{1}{2}(1 + \cos i)$$

7. Er i > 90° eller < 90° for hver af de tre nætter? Passer det med, hvordan Månen ser ud?

Del C — Fra fasevinkel til retning

Fasevinklen er en vinkel ved Månen. Det, I skal bruge, er elongationen ψ: vinklen ved Jorden mellem Solen og Månen. Betragt trekanten Sol–Jord–Måne. Fordi Solen står næsten 400 gange længere væk end Månen, er de to vinkler næsten supplementvinkler:

$$\psi \approx 180^\circ - i, \qquad \lambda = \lambda_\odot + \psi$$



Figur 3. Fasevinklen i måles ved Månen, elongationen ψ ved Jorden. Fejlen ved at bruge tilnærmelsen er under en kvart grad — mindre end måleusikkerheden.

8. Beregn ψ for hver nat, og derefter Månens ekliptiske længde λ = λ☉ + ψ. (Månen var tiltagende i maj 2026, altså øst for Solen; derfor plus.)
9. Nu har I tre par (r, λ) — tre punkter i Månens bane, angivet i polære koordinater med Jorden i origo.

Del D — Fra tre punkter til en ellipse

Et keglesnit med brændpunktet i origo har den polære ligning

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\lambda - \varpi)}$$

hvor p er parameteren, e excentriciteten og ϖ perigæumslængden — den retning, hvori banen er tættest på Jorden. Ligningen ser ubehagelig ud, men bliver behagelig, hvis man vender den om og bruger additionsformlen for cosinus:

$$\frac{1}{r} = A + B\cos\lambda + C\sin\lambda$$

med **A = 1/p**, **B = e·cos ϖ / p** og **C = e·sin ϖ / p**. Det er lineært i A, B og C. Tre punkter giver derfor tre ligninger med tre ubekendte:

$$A + B\cos\lambda_k + C\sin\lambda_k = 1/r_k \quad \text{for } k = 1, 2, 3$$

10. Opstil ligningssystemet med jeres tre målinger. Bemærk, at højresiden er 1/r, ikke r.
11. Løs det — i hånden eller med CAS.
12. Find derefter banens elementer:

$$p = \frac{1}{A}, \qquad e = \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{A}, \qquad \varpi = \arctan\left(\frac{C}{B}\right)$$

13. og til sidst den halve storakse:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

14. Beregn perigæums- og apogæumsafstanden, a(1−e) og a(1+e). Hvor meget varierer Månens afstand i løbet af et omløb, i procent?

Del E — Omløbstiden

Keplers tredje lov binder omløbstiden til den halve storakse:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \qquad \mu = 403\,503\ \mathrm{km^3 s^{-2}}$$

15. Beregn T i døgn. Sammenlign med den sideriske måned, 27,32 døgn, og med den anomalistiske måned, 27,55 døgn.
16. Læg mærke til, hvad I lige har gjort: I har bestemt Månens omløbstid ud fra tre fotografier taget over seks døgn — altså under en fjerdedel af et omløb. Hvordan kan det lade sig gøre?

Del F — Vurdering

17. Sammenlign jeres a, e og T med de rigtige værdier (spørg jeres lærer, eller slå dem op). Hvor stor er den relative afvigelse?
18. Prøv at ændre λ for den midterste nat med 2°, svarende til måleusikkerheden på terminatoren, og løs systemet igen. Hvor meget flytter a sig? Hvad fortæller det om, hvilken af de to målinger — randen eller terminatoren — der er den kritiske?
19. I har antaget, at Månen bevæger sig i ekliptikas plan. Det gør den ikke; banen hælder 5,1°. Hvorfor giver det alligevel et brugbart resultat, og i hvilken retning trækker fejlen?
20. Til sidst det principielle: Månens bane er ikke en ellipse. Solen forstyrrer bevægelsen så meget, at banens elementer ændrer sig fra uge til uge. Diskutér, hvad det betyder for, hvordan man skal forstå det tal, I har regnet ud.

Del 3 — Eksempelopgave med fuld løsning

Herunder er hele kæden regnet igennem. Tallene i venstre kolonne er dem, eleverne får; alt andet er facit. Mellemregningerne er anført med flere cifre, end der er signifikans i, så man kan kontrollere trin for trin.

Trin A1 — den tilsyneladende halvdiameter (22. maj)

R = 718,69 pixels, og pladeskalaen er 1,3293 buesekund pr. pixel:

$s = 718{,}69 \cdot 1{,}3293'' = 955{,}33'' = 955{,}33 \,/\, 3600 = 0{,}26537°$

Trin A2 — den topocentriske afstand

$\sin(0{,}26537°) = 0{,}0046315$

$\Delta = R(\text{Måne}) \,/\, \sin s = 1737{,}4 \,/\, 0{,}0046315 = 375\,123 \text{ km}$

Trin A3 — den geocentriske afstand

Med h = 25,63° og $R\oplus$ = 6378,1 km:

$r^2 = 375\,123^2 + 6378{,}1^2 + 2 \cdot 375\,123 \cdot 6378{,}1 \cdot \sin(25{,}63°)$

$r^2 = 1{,}40717 \cdot 10^{11} + 4{,}0680 \cdot 10^{7} + 2{,}0699 \cdot 10^{9} = 1{,}42828 \cdot 10^{11}$

r = 377 926 km

Forskellen mellem Δ og r er 2803 km, altså 0,75 %. Det er ikke til at se bort fra.

Trin B — fasevinklen

u_t = +116,7 pixels, R = 718,69 pixels:

$\cos i = -116{,}7 \,/\, 718{,}69 = -0{,}16234$

$i = \arccos(-0{,}16234) = 99{,}343°$

$k = \tfrac{1}{2}(1 - 0{,}16234) = 0{,}4188$ — altså 42 % oplyst, lidt mindre end halv. Det passer med billedet.

Trin C — elongation og ekliptisk længde

$\psi \approx 180° - 99{,}343° = 80{,}657°$

$\lambda = \lambda\odot + \psi = 61{,}790° + 80{,}657° = 142{,}45°$

Den eksakte løsning af trekanten giver $\psi = 80{,}516°$ og $\lambda = 142{,}306°$. Tilnærmelsen koster altså 0,14° — under en tiendedel af måleusikkerheden. I regningerne herunder bruges de eksakte værdier.

Alle tre nætter

Nat	s	Δ (km)	r (km)	cos i	i	λ
19/5	989,20″	362 279	364 047	−0,72985	136,874°	101,926°
22/5	**955,33″**	**375 123**	**377 926**	**−0,16234**	**99,343°**	**142,306°**
25/5	914,95″	391 680	393 912	+0,42955	64,561°	180,008°

Trin D — ligningssystemet

Med 1/r på højresiden:

k	λ	cos λ	sin λ	1/r (km⁻¹)
1	101,926°	−0,207446	+0,978246	$2{,}746890 \cdot 10^{-6}$
2	142,306°	−0,791539	+0,611119	$2{,}646030 \cdot 10^{-6}$
3	180,008°	−1,000000	−0,000140	$2{,}538641 \cdot 10^{-6}$

Systemet lyder altså:

$A - 0{,}207446 \cdot B + 0{,}978246 \cdot C = 2{,}746890 \cdot 10^{-6}$

$A - 0{,}791539 \cdot B + 0{,}611119 \cdot C = 2{,}646030 \cdot 10^{-6}$

$A - 1{,}000000 \cdot B - 0{,}000140 \cdot C = 2{,}538641 \cdot 10^{-6}$

Løsningen er:

$A = 2{,}617988 \cdot 10^{-6}$ $B = 7{,}932918 \cdot 10^{-8}$ $C = 1{,}485088 \cdot 10^{-7}$

Trin D2 — baneelementerne

$p = 1/A = 1/2{,}617988 \cdot 10^{-6} = 381\,973$ km

$\sqrt{(B^2 + C^2)} = \sqrt{(6{,}2931 \cdot 10^{-15} + 2{,}2055 \cdot 10^{-14})} = 1{,}68352 \cdot 10^{-7}$

$e = 1{,}68352 \cdot 10^{-7} \,/\, 2{,}617988 \cdot 10^{-6} = 0{,}06431$

$\varpi = \arctan(1{,}485088 \cdot 10^{-7} \,/\, 7{,}932918 \cdot 10^{-8}) = 61{,}89°$

$a = p \,/\, (1 - e^2) = 381\,973 \,/\, (1 - 0{,}0041358) = 383\,559$ km

perigæum: $a(1 - e) = 358\,892$ km apogæum: $a(1 + e) = 408\,227$ km

Månens afstand varierer altså med 49 335 km, svarende til 12,9 % af den halve storakse.

Trin E — omløbstiden

$T = 2\pi \sqrt{(a^3/\mu)} = 2\pi \sqrt{(383\,559^3 \,/\, 403\,503)} = 2\pi \sqrt{(1{,}39834 \cdot 10^{10})}$ s

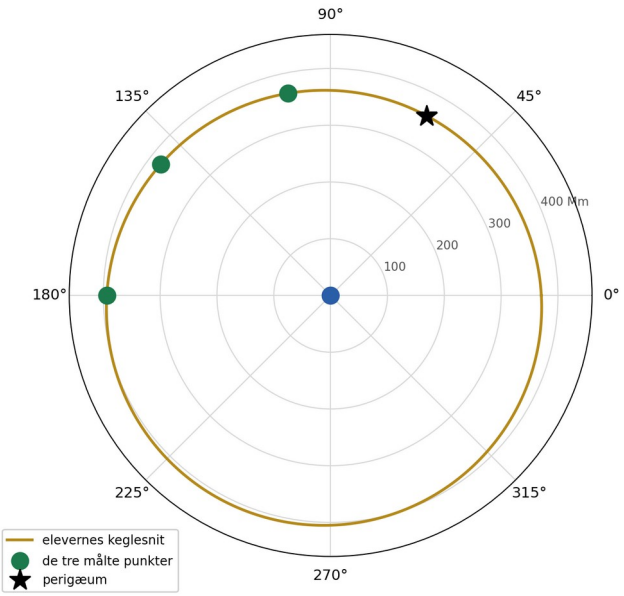
$T = 2\pi \cdot 118\,251$ s $= 742\,998$ s $= 8{,}599$ døgn?

Nej — kontrollér enhederne. $a^3 = 5{,}6423 \cdot 10^{16}$ km³, divideret med $\mu = 403\,503$ km³/s² giver $1{,}39834 \cdot 10^{11}$ s², og kvadratroden er 373 944 s. Ganget med 2π: T = 2 349 600 s = 27,195 døgn.

Enhedsfejlen ovenfor er med vilje: den er den hyppigste i hele øvelsen. Lad eleverne finde den.

Facit og sammenligning

Størrelse	Elevernes resultat	Rigtig værdi (22. maj)	Afvigelse
halve storakse a	**383 559 km**	**380 411 km**	**+0,83 %**
excentricitet e	0,06431	0,06239	+0,00192
perigæumslængde ϖ	61,89°	56,83°	+5,06°
omløbstid T	**27,195 d**	**26,861 d**	**+1,24 %**
perigæumsafstand	358 892 km	356 676 km	+2 216 km



Figur 4. Elevernes løsning. De tre målte punkter og det keglesnit, der går præcis gennem dem. Med e = 0,064 ser banen næsten cirkulær ud — men Jorden sidder ikke i midten, og forskellen mellem nærmeste og fjerneste punkt er næsten 50 000 km.

Hvor kommer afvigelsen fra?

Tre kilder, i stigende orden af interesse:

- **Måleusikkerheden på terminatoren.** Skyggegrænsen er ikke en skarp kant, men en zone, hvor bjerge fanger lys og kraterbunde ligger i mørke. Fasevinklen kan derfor kun bestemmes til et par grader, og det slår igennem på λ.
- **Antagelsen om, at banen ligger i ekliptika.** Det gør den ikke; den hælder 5,1°, og i de seks døgn løb Månens ekliptiske bredde fra +4,0° til −2,5°. Det giver en systematisk fejl i λ på nogle få tiendedele af en grad.
- **At Månen ikke følger en ellipse.** Solens forstyrrelse af månebevægelsen er af størrelsesordenen 1/179 af Jordens tiltrækning — enormt sammenlignet med, hvad planeterne gør ved en komet. Banens elementer ændrer sig fra uge til uge: den oskulerende excentricitet svinger mellem 0,026 og 0,077, og apselinjen drejer 0,11° i døgnet. Der findes med andre ord ikke ét rigtigt svar at ramme.

Det sidste punkt er øvelsens egentlige udbytte. **Tre punkter passer altid perfekt til et keglesnit — også når banen slet ikke er et keglesnit.** Vil man opdage, at modellen er forkert, skal man måle flere punkter, end der er ubekendte. Først da dukker afvigelsen op som en rest, man kan se. Det er en generel lektion om modeller, ikke kun om måner.

Til den ambitiøse elev

Mål selv en fjerde og femte nat i billederne, opstil systemet med fem ligninger og tre ubekendte, og løs det med mindste kvadraters metode. Se på residualerne. De vil ikke være nul — og størrelsen af dem er et direkte mål for, hvor meget Solen forstyrrer Månens bane.

Materiale

Billederne, de fulde mellemregninger og en gennemgang af begge metoder — Keplers, som bruges her, og Gauss' metode fra 1801, som bygger på retninger i stedet for afstande:

Sammenligning af de to metoder: https://michaelhgrant.github.io/Natur-fysik-kemi-mat/maanens-bane-to-metoder.html

Kepler-vejen i fuld længde, med billederne: https://michaelhgrant.github.io/Natur-fysik-kemi-mat/maanens-bane-af-et-fotografi.html

Sitets astronomiafsnit: https://michaelhgrant.github.io/Natur-fysik-kemi-mat/index.html#astro

---

Alle optagelser: Unistellar eVscope 2, Sostrup Slot, Djursland (56,42° N, 10,75° Ø), maj 2026. Vejledningen må frit kopieres og bruges i undervisningen.