Lyd i rør med strømning

Lorentz-transformation frem og tilbage – og hvordan man nemt beregner bølgetal, dæmpning og transmissionstab

Michael H. Grant
Lektor emeritus i fysik & matematik, Grenaa Gymnasium

November 2026

Resumé

Når gassen i et rør strømmer med hastigheden V, opfylder lydtrykket ikke den sædvanlige bølgeligning, men den konvektive bølgeligning med et blandet led $\partial^2 p/\partial x\,\partial t$. Den Galilei-transformation, der ofte bruges, flytter beregningen over i gassens hvilesystem – men dér bevæger rørets ender og foringsstykker sig, og en harmonisk svingning i laboratoriet bliver til to forskellige frekvenser. Bølgeligningen er ikke invariant under Galilei-transformationen. En Lorentz-transformation med lydens fart c i stedet for lysets fjerner derimod det blandede led *og* holder væggene i ro. Man kan så løse det velkendte problem uden strømning og transformere tilbage. Notatet gennemgår transformationen, de hårdvæggede modes, transfermatricen for et rørstykke, ekspansionskammerets transmissionstab og den forede kanal med Myers' randbetingelse. Alle resultater er kontrolleret numerisk mod en direkte løsning i laboratoriesystemet.

1 Den konvektive bølgeligning

Gassen strømmer med den konstante hastighed V i x-retningen (propstrømning), og $M = V/c$ er Mach-tallet. Linearisere Euler- og kontinuitetsligningen om denne middelstrømning, optræder tidsafledte som den *substantielle* afledte $D/Dt = \partial_t + V\partial_x$:

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{Dp}{Dt} + \rho_0 \nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

Elimineres $\mathbf{u}$, fås

$$\frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 p - \nabla^2 p = 0, \tag{2}$$

eller, skrevet ud i én dimension som på siden *Relativistisk akustik*,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2M}{c}\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t} - (1-M^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \nabla_\perp^2 p = 0. \tag{3}$$

Her er $\nabla_\perp^2 = \partial_y^2 + \partial_z^2$ den tværgående del. Det blandede led gør løsningerne asymmetriske: lyden opfører sig forskelligt med og mod strømmen.

Gennem hele notatet bruges tidsfaktoren $e^{i\omega t}$, og en bølge $e^{i(\omega t - k_x x)}$ med $\operatorname{Re} k_x > 0$ løber medstrøms. Desuden er

$$k = \frac{\omega}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}.$$

2 Hvorfor Galilei-transformationen ikke er nok

Det nærliggende er at gå over i gassens hvilesystem:

$$x'' = x - Vt, \qquad t'' = t. \tag{4}$$

Så er $\partial_t + V\partial_x = \partial_{t''}$ og $\partial_x = \partial_{x''}$, og (2) bliver til d'Alembert-ligningen i (x'', t''). Det ser bekvemt ud, men har tre ulemper:

1. **Bølgeligningen er ikke Galilei-invariant.** Det er netop derfor, den konvektive ligning (2) opstår: anvendt på d'Alembert-ligningen i gassens system giver Galilei-transformationen det blandede led i laboratoriet. Ligningens *form* afhænger altså af systemet.
2. **Randene bevæger sig.** Røret, ekspansionskammerets ender og foringens start og slut ligger fast i laboratoriet, men i gassens system ligger de ved $x'' = -Vt''$, $x'' = L - Vt''$ osv. Et problem med faste rande bliver et problem med bevægelige rande.
3. **Frekvensen bevares ikke.** En medløbende og en modløbende bølge med samme laboratoriefrekvens ω har frekvenserne $\omega'' = \omega - Vk_x$, som er forskellige for de to bølger (Doppler). En enkelt harmonisk svingning bliver til to.

Galilei-transformationen er god til ét rent udbredelsesproblem uden rande, og den giver den simple dæmpningsmodel på *Relativistisk akustik*. Men til reflektioner, ekspansionskamre og forede rør er den uhåndterlig.

3 Lorentz-transformationen

3.1 Frem

Med lydens fart c i stedet for lysets defineres

$$x' = \gamma x, \qquad t' = \frac{t}{\gamma} + \frac{\gamma M}{c}\,x, \qquad y' = y, \quad z' = z. \tag{5}$$

Kædereglen giver

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t'}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\gamma M}{c}\frac{\partial}{\partial t'}, \tag{6}$$

og dermed

$$\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x} = \Big(\frac{1}{\gamma} + \gamma M^2\Big)\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma M c\,\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\Big(\frac{\partial}{\partial t'} + Mc\,\frac{\partial}{\partial x'}\Big), \tag{7}$$

fordi $1/\gamma + \gamma M^2 = \gamma(1 - M^2) + \gamma M^2 = \gamma$. Indsættes i (2):

$$\frac{1}{c^2}\big(\partial_t + V\partial_x\big)^2 = \gamma^2\Big[\frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2 + \frac{2M}{c}\partial_{t'}\partial_{x'} + M^2\partial_{x'}^2\Big], \tag{8}$$

$$\partial_x^2 = \gamma^2\Big[\partial_{x'}^2 + \frac{2M}{c}\partial_{x'}\partial_{t'} + \frac{M^2}{c^2}\partial_{t'}^2\Big]. \tag{9}$$

Ved subtraktionen forsvinder de blandede led, og $\gamma^2(1 - M^2) = 1$ giver

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x'^2} - \nabla_\perp^2 p = 0. \tag{10}$$

Det er den almindelige bølgeligning uden strømning. Det afgørende er, at transformationen kun *strækker* x med faktoren γ og ikke blander t ind i stedkoordinaten. Væggene $y, z =$ konst. står stille, og et rørstykke $0 \le x \le L$ bliver til $0 \le x' \le \gamma L$.

3.2 Tilbage

Den inverse transformation er

$$x = \frac{x'}{\gamma}, \qquad t = \gamma t' - \frac{\gamma M}{c}\, x'. \tag{11}$$

3.3 Harmoniske svingninger: frekvensen bevares

Skriv lydtrykket i laboratoriet som $p = P(x,y,z)\, e^{i\omega t}$. Med den inverse transformation er

$$\omega t = \gamma\omega\, t' - \gamma k M\, x' = \omega' t' - KMx', \qquad \omega' = \gamma\omega, \quad K = \frac{\omega'}{c} = \gamma k. \tag{12}$$

Sætter vi derfor

$$P(x,y,z) = \Phi(x',y,z)\, e^{\,iKMx'} = \Phi(\gamma x, y, z)\, e^{\,i\gamma^2 kMx}, \tag{13}$$

så er $p = \Phi(x',y,z)\, e^{i\omega' t'}$: en ren harmonisk svingning med *én* frekvens ω' også i det mærkede system. Af (10) følger den almindelige Helmholtz-ligning

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \nabla_\perp^2 \Phi + K^2 \Phi = 0. \tag{14}$$

Faktoren $e^{iKMx'}$ har reelt bølgetal. Den er en ren *konvektiv fasedrejning* og bidrager aldrig til dæmpning. Al dæmpning sidder i Φ.

Oversættelsestabel (laboratorium → mærket system)

frekvens	$\omega \;\to\; \omega' = \gamma\omega, \quad k \;\to\; K = \gamma k$
længde langs røret	$L \;\to\; L' = \gamma L$
tværmål, hårde vægge	uændrede
lydtryk	$P = \Phi\, e^{iKMx'}$
bølgetal tilbage	$k_x^{\pm} = \gamma\,(\pm\kappa - MK)$, hvor $\Phi \propto e^{\mp i\kappa x'}$

Den sidste linje følger direkte af (13): $e^{iKMx'} e^{\mp i\kappa x'} = e^{-i\gamma(\pm\kappa - MK)x}$.

4 Hårdvæggede rør

4.1 Modes og bølgetal

I det mærkede system er en mode $\Phi = \psi_{mn}(y,z)\, e^{\mp i\kappa_{mn} x'}$ med $\nabla_\perp^2 \psi_{mn} = -k_{mn}^2 \psi_{mn}$ og $\kappa_{mn} = \sqrt{K^2 - k_{mn}^2}$, præcis som uden strømning. Tilbage i laboratoriet:

$$k_x^{\pm} = \gamma(\,\pm\kappa_{mn} - MK) = \frac{-Mk \pm \sqrt{k^2 - (1-M^2)k_{mn}^2}}{1-M^2}. \tag{15}$$

Plan bølge ($k_{mn} = 0$, $\kappa = K$):

$$k_x^+ = \gamma^2 k(1-M) = \frac{k}{1+M}, \qquad k_x^- = -\gamma^2 k(1+M) = -\frac{k}{1-M}. \tag{16}$$

Fasehastighederne er $c+V$ og $c-V$, som de skal være.

Grænsefrekvens. Mode (m,n) kan udbrede sig, når $K > k_{mn}$, dvs.

$$f > f_{mn}\sqrt{1-M^2}, \tag{17}$$

hvor $f_{mn} = ck_{mn}/2\pi$ er grænsefrekvensen uden strømning. Strømningen sænker altså alle grænsefrekvenser med faktoren $1/\gamma$, ens for begge retninger. For et rektangulært rør med bredden b er $f_{10} = \frac{c}{2b}\sqrt{1-M^2}$.

4.2 Partikelhastighed og intensitet

Impulsligningen for en plan bølge $p_\pm e^{i(\omega t - k_x^\pm x)}$ giver $\rho_0\, i(\omega - Vk_x)u = ik_x p$. Medstrøms er $\omega - Vk_x^+ = \omega/(1+M)$ og $k_x^+ = k/(1+M)$, altså

$$u_\pm = \pm\frac{p_\pm}{\rho_0 c}. \tag{18}$$

Den karakteristiske impedans er uændret. Effekten, der transporteres, er derimod (Morfey 1971)

$$W_\pm = \frac{S\,|p_\pm|^2}{2\rho_0 c}\,(1\pm M)^2, \tag{19}$$

med amplitudeværdier. Når ind- og udløbsrør har samme areal og samme Mach-tal, går faktoren $(1\pm M)^2$ ud i transmissionstabet.

4.3 Transfermatrix for et rørstykke – frem og tilbage

I det mærkede system er et rørstykke med længden $L' = \gamma L$ det velkendte stykke uden strømning. Tilbage i laboratoriet fås, med (13) og $u_\pm = \pm p_\pm/\rho_0 c$,

$$p(x) = e^{i\gamma^2 kMx}\big(A\,e^{-i\gamma^2 kx} + B\,e^{i\gamma^2 kx}\big), \tag{20}$$

$$\rho_0 c\,u(x) = e^{i\gamma^2 kMx}\big(A\,e^{-i\gamma^2 kx} - B\,e^{i\gamma^2 kx}\big). \tag{21}$$

Med volumenhastigheden $q = Su$ og $Y = \rho_0 c/S$ bliver transfermatricen

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{x=0} = e^{-i\gamma^2 kML} \begin{pmatrix} \cos\gamma^2 kL & iY\sin\gamma^2 kL \\ iY^{-1}\sin\gamma^2 kL & \cos\gamma^2 kL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{x=L}. \tag{22}$$

Det er matricen uden strømning med to ændringer:

- den elektriske længde kL erstattes af $\gamma^2 kL = kL/(1-M^2)$;
- der kommer en fælles fasefaktor $e^{-i\gamma^2 kML}$ med absolut værdi 1.

Det er hele gevinsten ved at gå frem og tilbage: man behøver ikke løse noget nyt.

5 Ekspansionskammeret

Indløbs- og udløbsrøret har arealet S_1 og Mach-tallet M_1. Kammeret har arealet $S_2 = mS_1$ og længden L. Middelstrømningens kontinuitet giver Mach-tallet i kammeret, $M_k = M_1/m$. Ved de to spring antages kontinuitet af lydtryk og akustisk volumenhastighed. Transmissionstabet for et rør med lyddød afslutning er

$$\mathrm{TL} = 20\log_{10}\left|\tfrac{1}{2}(T_{11} + T_{12}/Y_1 + Y_1 T_{21} + T_{22})\right|. \tag{23}$$

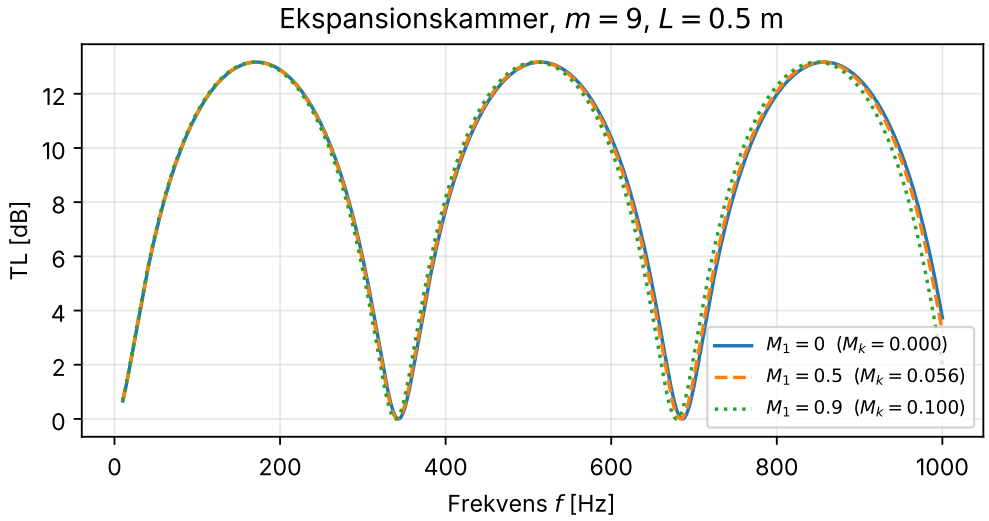
Fasefaktoren i (22) har absolut værdi 1 og falder ud. Effektfaktoren $(1+M_1)^2$ er ens i ind- og udløb. Tilbage står den klassiske formel, blot med $kL \to kL/(1-M_k^2)$:

$$\mathrm{TL} = 10\log_{10}\left[1 + \tfrac{1}{4}\Big(m - \frac{1}{m}\Big)^2 \sin^2\Big(\frac{kL}{1-M_k^2}\Big)\right]. \tag{24}$$

Maksimal dæmpning, $10\log_{10}[1+\tfrac{1}{4}(m-1/m)^2]$, er uændret, men toppene flyttes ned i frekvens til

$$f_n = \frac{(2n-1)\,c\,(1-M_k^2)}{4L}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

og nulpunkterne tilsvarende til $f = n\,c(1-M_k^2)/2L$. Fordi $M_k = M_1/m$ er lille i et stort kammer, er effekten beskeden (figur 1).



Figur 1: Transmissionstab for et ekspansionskammer med $m = 9$ og $L = 0{,}5\,\mathrm{m}$ efter (24). Kurverne er beregnet både med transfermatricen (22) og med den lukkede formel. De stemmer overens til $10^{-9}\,\mathrm{dB}$.

Forbehold. Med strømning er de simple springbetingelser kun en tilnærmelse. Ved et pludseligt spring løsriver strømningen sig. Munjal (2014) bruger derfor kontinuitet af massestrøm og et tryktab med en tabskoefficient. Det giver ekstra led af orden M_1, som især betyder noget for $M_1 \gtrsim 0{,}2$. Transformationen ændrer ikke ved det: springbetingelserne er fysik ved diskontinuiteten, ikke en del af bølgeligningen.

6 Den forede kanal

6.1 Myers' randbetingelse

Ved en lokalt reagerende foring med den normaliserede impedans $\zeta = Z/\rho_0 c$ (for $e^{i\omega t}$) og propstrømning helt ind til væggen kræves kontinuitet af partikel*forskydningen* (Ingard 1959, Myers 1980). Gassen strømmer forbi en væg, der bevæger sig, så normalhastigheden i gassen er $(\partial_t + V\partial_x)\xi$, mens væggens er $\partial_t \xi = p/Z$. For en mode med $e^{i(\omega t - k_x x)}$ giver det

$$v_n = \Big(1 - \frac{M k_x}{k}\Big)\frac{p}{Z}. \tag{26}$$

For en kanal med højden $2h$, foret på begge vægge, og en symmetrisk mode $p \propto \cos(qy)$ giver impulsligningen i y-retningen

$$q\tan(qh) = \frac{ik}{\zeta}\Big(1 - \frac{Mk_x}{k}\Big)^2, \qquad (k - Mk_x)^2 = k_x^2 + q^2. \tag{27}$$

Løst direkte er det et koblet, ikke-lineært problem i (k_x, q).

6.2 Frem: den forede kanal uden strømning

I det mærkede system er q uændret (tværkoordinaten transformeres ikke), og $\kappa = \sqrt{K^2 - q^2}$. Med $k_x^{\pm} = \gamma(\pm\kappa - MK)$ er

$$k - Mk_x^{\pm} = \frac{K}{\gamma} - \gamma M(\pm\kappa - MK) = \gamma\,(K \mp M\kappa). \tag{28}$$

Randbetingelsen (27) bliver derfor

$$q\tan(qh) = \frac{iK}{\zeta'_{\pm}}, \qquad \zeta'_{\pm} = \frac{\zeta}{\gamma^3(1 \mp M\kappa/K)^2}. \tag{29}$$

Det er *nøjagtig* randbetingelsen for en foret kanal uden strømning, ved frekvensen $\omega' = \gamma\omega$ og med en effektiv impedans $\zeta'_{\pm}$. Man kan genbruge sin rutine eller sine kurver fra tilfældet uden strømning. Eneste komplikation er, at ζ' afhænger af modens eget κ, så man itererer: start med $\kappa = K$, løs, opdater ζ', løs igen. Det konvergerer på få trin.

6.3 Tilbage: dæmpningen

Fordi fasefaktoren $e^{iKMx'}$ er rent reel i eksponenten, er dæmpningen i laboratoriet

$$\alpha_{\pm} = -\operatorname{Im} k_x^{\pm} = \gamma\,|\operatorname{Im}\kappa|, \qquad D_{\pm} = 8{,}686\,\alpha_{\pm}\ \ \text{dB/m}, \tag{30}$$

og et foret stykke med længden L giver, når der ses bort fra reflektioner ved foringens ender,

$$\mathrm{TL} \approx 8{,}686\,\alpha_{\pm} L\ \text{dB}. \tag{31}$$

6.4 Et lukket resultat: svag foring

Er foringens admittans lille, $|1/\zeta| \ll kh$, er $qh \ll 1$ og $\kappa \approx K$. Så er $q^2 \approx iK/(\zeta' h)$ og $\kappa \approx K - q^2/2K$, dvs. $\operatorname{Im}\kappa \approx -\operatorname{Re}(1/\zeta')/2h$. Med (29) og $\kappa \approx K$:

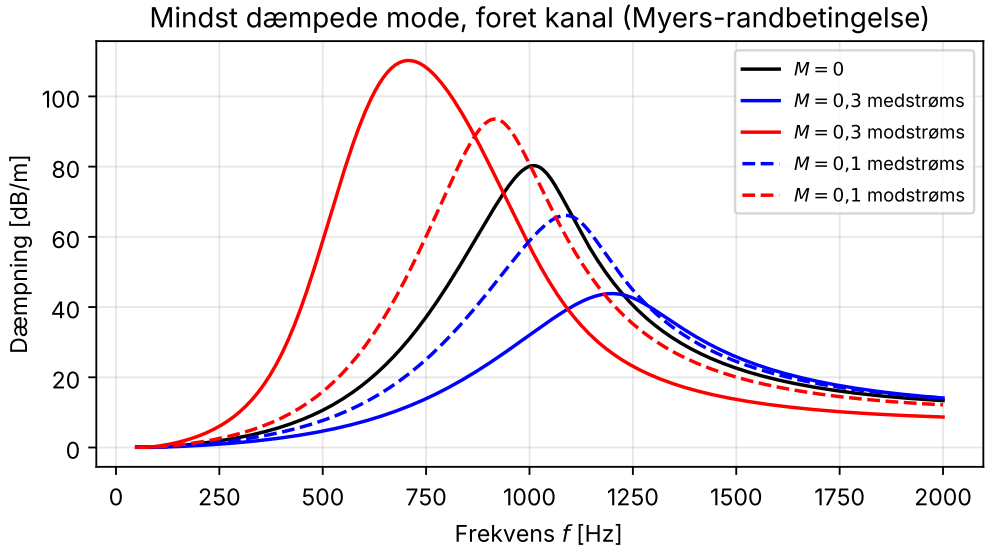
$$\alpha_{\pm} = \gamma \cdot \gamma^3(1 \mp M)^2\,\frac{\operatorname{Re}(1/\zeta)}{2h} = \frac{(1 \mp M)^2}{(1 - M^2)^2}\,\alpha_0 \tag{32}$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{\alpha_0}{(1 \pm M)^2}, \qquad \frac{\alpha_-}{\alpha_+} = \Big(\frac{1+M}{1-M}\Big)^2. \tag{33}$$

Her er $\alpha_0 = \mathrm{Re}(1/\zeta)/2h$ dæmpningen uden strømning. Sammenlign med resultatet $\alpha_0/(1\pm M)$ på siden *Relativistisk akustik*. Dér ses dæmpningen som en egenskab ved gassen, der virker med en fast rate pr. tidsenhed. Med en foring giver randbetingelsen en ekstra faktor $1/(1\pm M)$: væggens forskydning ses Doppler-forskudt af den strømmende gas, og faktoren $(1 - Mk_x/k) = 1/(1 \pm M)$ indgår i anden potens i (27). Ved $M = 0{,}3$ er forholdet mellem modstrøms og medstrøms dæmpning altså 3,45 med foring mod 1,86 i gasmodellen.

6.5 Talteksempel: porøs foring

Figur 2 viser den mindst dæmpede mode i en kanal med $2h = 0{,}2\,\mathrm{m}$, foret på begge sider med $d = 5\,\mathrm{cm}$ porøst materiale med strømningsmodstanden $\sigma = 10\,\mathrm{kPa\,s/m^2}$ på hård bagvæg. Impedansen er beregnet med Delany–Bazley. Hver kurve er løst i det mærkede system og transformeret tilbage. Løsningen er kontrolleret ved at indsætte den i (27) i laboratoriesystemet; residualet er under 10^{-6} overalt.



Figur 2: Dæmpning af den mindst dæmpede mode med og mod strømmen. Toppen flyttes ned i frekvens modstrøms og op medstrøms.

To ting ses:

1. Ved lave frekvenser dæmper kanalen mest modstrøms, som forventet.
2. Dæmpningstoppen *flyttes*. Det forstås direkte af transformationen: i det mærkede system er frekvensen $\gamma\omega$, og den effektive impedans $\zeta'_{\pm}$ er skaleret med $1/\gamma^3(1 \mp M)^2$. Modstrøms bliver foringen effektivt "blødere" og toppen ligger lavere. Over toppen kan dæmpningen derfor være *mindre* modstrøms end uden strømning.

Figur 3 sammenligner forholdet $\alpha(M)/\alpha(0)$ med de to lukkede udtryk. For en svag foring ($\zeta = 100$) ligger de numeriske punkter præcis på $1/(1 \pm M)^2$, hvilket bekræfter (33). For den realistiske porøse foring er strømningseffekten endnu større, fordi κ ikke er tæt på K, og fordi foringens egen resonans flyttes.

f [Hz]	$M=-0{,}3$	$M=-0{,}1$	$M=0$	$M=+0{,}1$	$M=+0{,}3$
125	0,8	0,4	0,3	0,2	0,2
250	6,0	2,6	1,9	1,5	0,9
500	58,8	15,9	10,6	7,7	4,7
1000	57,3	80,7	80,1	58,9	32,0
2000	8,7	12,2	13,4	14,1	14,1

Tabel 1: Dæmpning i dB pr. meter foret kanal (mindst dæmpede mode). Negativt M betyder modstrøms. Ved 2000 Hz har den mindst dæmpede mode trukket sig ind mod kanalens midte og dæmpes kun svagt; her er dæmpningen størst *medstrøms*, fordi toppen er flyttet. Tallene over ca. 40 dB er teoretiske: i praksis begrænses transmissionstabet af højere modes og flanketransmission.

Forbehold. Myers' randbetingelse forudsætter propstrømning helt ind til væggen. Et virkeligt grænselag af endelig tykkelse svækker strømningens indflydelse på randbetingelsen, især ved høje frekvenser. Myers-betingelsen giver derfor en øvre grænse for asymmetrien.

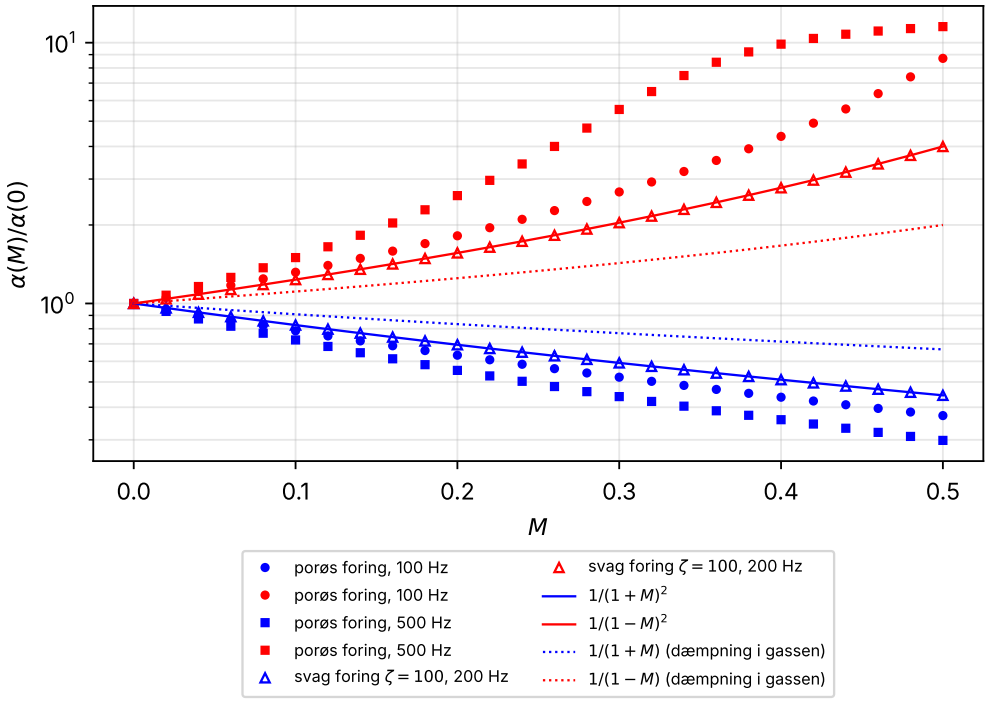
7 Opskriften – frem og tilbage

1. **Problemet i laboratoriet:** frekvens ω, længder L, tværsnit, Mach-tal M, foringsimpedans ζ.
2. **Frem:** $\omega' = \gamma\omega$ ($K = \gamma k$), $L' = \gamma L$, tværmål uændrede, foring $\zeta \to \zeta'_\pm = \zeta/\gamma^3(1\mp M\kappa/K)^2$.
3. **Løs** det sædvanlige problem uden strømning: modes κ, transfermatricer, reflektioner.
4. **Tilbage:** gang med $e^{iKMx'}$. Det giver $k_x^\pm = \gamma(\pm\kappa - MK)$, $kL \to kL/(1-M^2)$ i transfermatricer, og dæmpningen $\alpha = \gamma|\operatorname{Im}\kappa|$.
5. **Effekt:** brug $W_\pm \propto (1\pm M)^2|p_\pm|^2$, hvis ind- og udløbsrør har forskellige Mach-tal.

8 Sammenfatning

Størrelse	Uden strømning	Med strømning (via Lorentz)
Plan bølge, bølgetal	$\pm k$	$k/(1+M)$, $-k/(1-M)$
Grænsefrekvens	f_{mn}	$f_{mn}\sqrt{1-M^2}$
Rørstykke, elektrisk længde	kL	$kL/(1-M^2)$ (+ fasefaktor)
Ekspansionskammer	$\sin^2 kL$	$\sin^2(kL/(1-M_k^2))$
Dæmpning, gasmodel	α_0	$\alpha_0/(1\pm M)$
Dæmpning, svag foring (Myers)	α_0	$\alpha_0/(1\pm M)^2$
Foring, generelt	ζ	$\zeta/\gamma^3(1\mp M\kappa/K)^2$ ved $\gamma\omega$

Lorentz-transformationen bevarer bølgeligningen og holder geometrien i ro. Derfor kan næsten al rørakustik med uniform strømning læses direkte ud af den kendte teori uden strømning. Prisen er en strækning af længderne med γ, en frekvens skaleret med γ, en konvektiv fasefaktor uden betydning for dæmpningen og, for forede rør, en effektiv impedans.



Figur 3: $\alpha(M)/\alpha(0)$ medstrøms (blå) og modstrøms (rød). Trekanter: svag, rent resistiv foring, der følger (33). Cirkler og firkanter: den porøse foring ved 100 og 500 Hz. Prikkede linjer: gasmodellen $1/(1 \pm M)$.

Litteratur

- U. Ingard, "Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reflection, absorption, and transmission", *J. Acoust. Soc. Am.* 31 (1959) 1035–1036.
- M. K. Myers, "On the acoustic boundary condition in the presence of flow", *J. Sound Vib.* 71 (1980) 429–434.
- C. L. Morfey, "Acoustic energy in non-uniform flows", *J. Sound Vib.* 14 (1971) 159–170.
- M. L. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, 2. udg., Wiley 2014.
- M. E. Delany & E. N. Bazley, "Acoustical properties of fibrous absorbent materials", *Applied Acoustics* 3 (1970) 105–116.
- M. H. Grant, *Sound Propagation in Ducts with Absorbent Linings*, kandidatafhandling, DTH 1989 (vejleder Finn Jacobsen), mhgfysik.dk/thesis2.html.
- M. H. Grant, *Relativistisk akustik*, mhgfysik.dk.
- Interaktive 3D-simuleringer til dette notat: mhgfysik.dk/lorentz-roer.html.