Månen målt med *skygger*

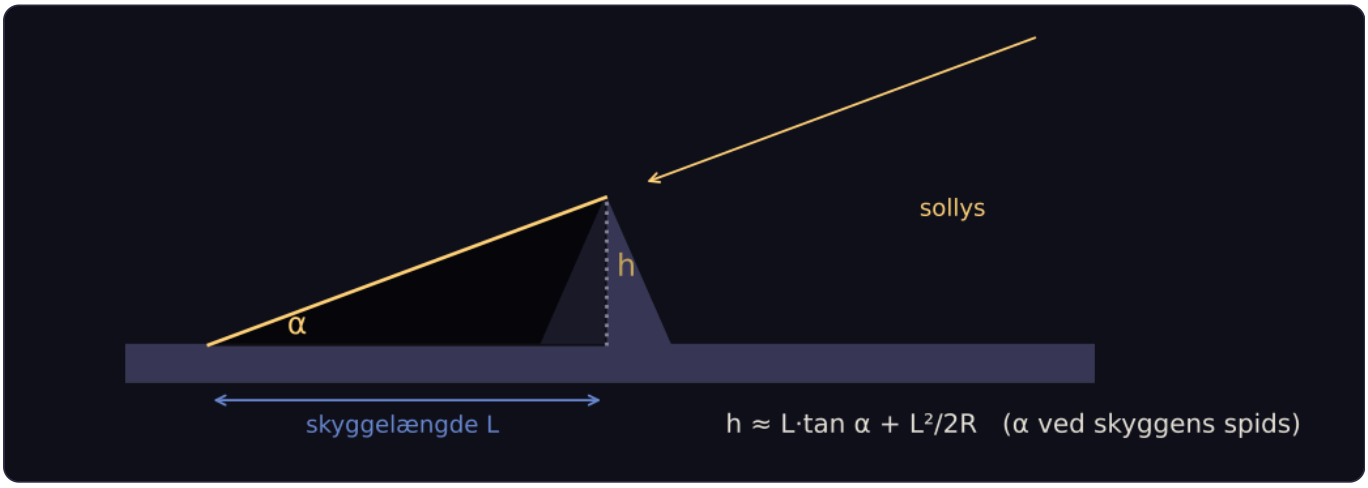
To gamle metoder brugt på mine egne billeder. Galilei så i 1610, at Månen har bjerge, og regnede ud, at de er flere kilometer høje. I dag måler man højderne ud fra bjergenes skygger. Aristarch og Hipparch brugte Jordens skygge under en måneformørkelse til at finde Månens størrelse og afstand. Begge dele kan man gøre i dag med et lille teleskop og et kamera, også en mobil holdt op til okularet.

1 · Bjerge og kratere

Når Solen står lavt over et sted på Månen, kaster bjerge og kraterrande lange skygger. Kender man skyggens længde L og Solens højde α over horisonten ved skyggens spids, er højden

$$h \approx L \cdot \tan \alpha$$

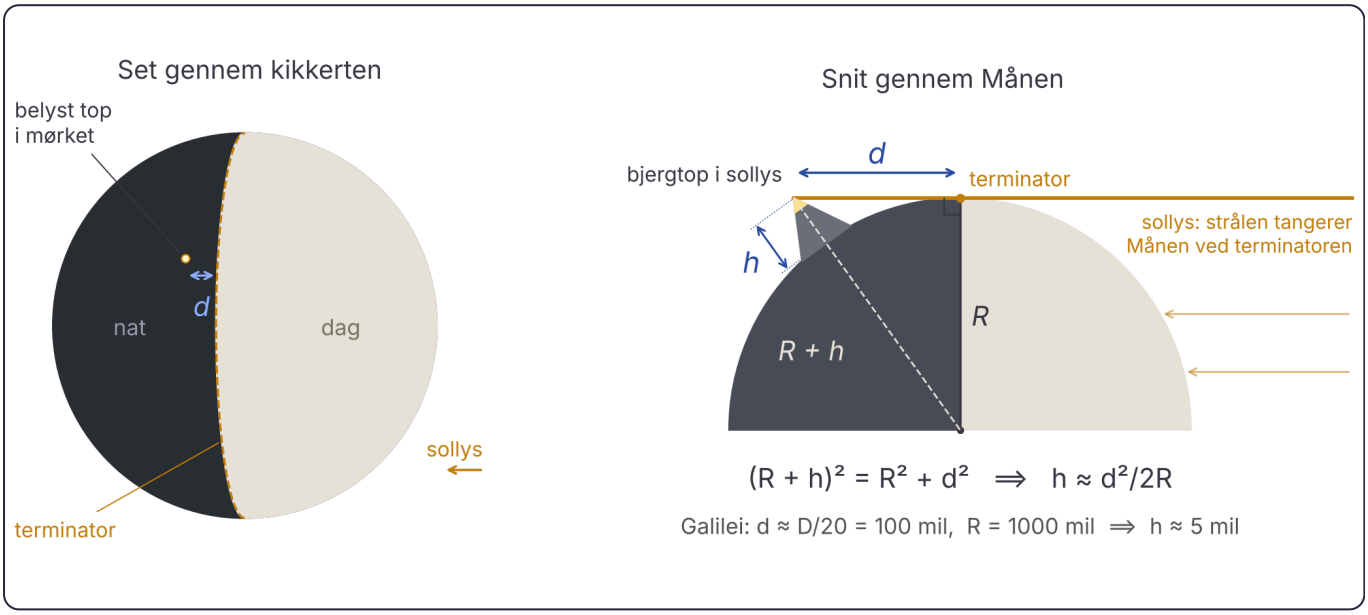
Ved meget lave solhøjder er skyggerne så lange, at Månens krumning betyder noget, og jeg regner derfor geometrien helt ud i tre dimensioner: sollyset tangerer toppen og rammer overfladen ved skyggens spids. Til første orden giver krumningen et ekstra led $L^2/(2R)$, når α er solhøjden ved skyggens spids. Regner man med solhøjden ved bjerget, skal leddet trækkes fra, fordi Solen står L/R højere dér.



Skyggemetoden. Solhøjden α er vinklen mellem sollyset og den lokale horisont ved skyggens spids.

GALILEIS REGNESTYKKE

Galilei målte ikke selve skyggerne. I *Sidereus Nuncius* (1610) beskriver han lyse punkter, der dukker op i den mørke del af Månen et stykke fra terminatoren. Det er bjergtoppe, som Solen allerede belyser, mens terrænet omkring dem endnu ligger i mørke. Den solstråle, der netop rammer toppen, tangerer Månens overflade ved terminatoren. Er afstanden fra terminatoren til toppen d, giver Pythagoras $(R + h)^2 = R^2 + d^2$, altså $h \approx d^2/2R$.



Galileis metode. Til venstre: en bjergtop i den mørke del af Månen fanger allerede sollyset i afstanden d fra terminatoren. Til højre: den solstråle, der netop rammer toppen, tangerer Månen ved terminatoren, så R, d og $R + h$ danner en retvinklet trekant. Bjergets højde er stærkt overdrevet.

Galilei satte Månens diameter til 2000 italienske mil og så lyse toppe op til 1/20 af diameteren, altså 100 mil, inde i mørket. Det giver $1000^2 + 100^2 = 1\,010\,000$, hvis kvadratrod er knap 1005, så toppen ligger omkring 5 mil over kuglen. Galilei skrev forsigtigt »mere end fire mil«, svarende til 6–7 km, og konkluderede, at Månens bjerge er højere end Jordens. Det var et angreb på den aristoteliske forestilling om en fuldkommen glat himmelkugle. Tallet er lidt for stort, men størrelsesordenen er rigtig, og leddet $d^2/2R$ er det samme krumningsled, som optræder i skyggeformlen ovenfor. Senere målte man i stedet skyggernes længde, og Beer og Mädler bestemte på den måde højden af over tusind månebjerge i 1830'erne.

HØJDE OVER HVAD?

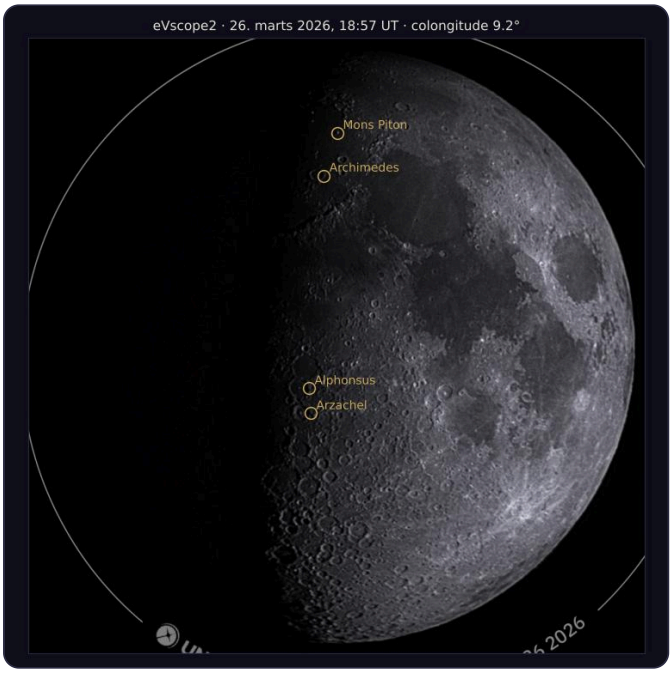
Månen har intet hav, så der er intet havniveau at måle fra. Galileis nulpunkt var underforstået den ideelle kugle: han antog, at terrænet ved terminatoren lå på kugleoverfladen. I dag angiver man absolutte højder over en referencekugle med radius 1737,4 km omkring Månens tyngdepunkt. Derfor har bunden af Copernicus en højde på omkring −3,4 km i NASA's højdedata. Månens højeste punkt ligger knap 11 km over kuglen og det laveste godt 9 km under, så det samlede spænd er omkring 20 km. Skyggemetoden

måler derimod en relativ højde: toppen over det sted, hvor skyggen ender. Litteraturværdierne for enkeltstående bjerge er også relative, men regnet fra et omgivende terræn, som hver forfatter selv vælger, og det forklarer en del af forskellene i tabellen nedenfor.

BILLEDERNE

Jeg har brugt to af mine eVscope2-billeder (indbygget kamera og stacking) med lange skygger nær terminatoren: 26. marts 2026 kl. 18:57 UT (19:57 dansk tid) og 25. maj 2026 kl. 22:01 UT (26. maj kl. 00:01 dansk sommertid). eVscope2 har brændvidde 450 mm og pixels på 2,9 µm, så skalaen er 1,329″ pr. pixel, hvilket svarer til 2,4–2,5 km pr. pixel midt på Månen. Som kontrol har Månen på et råbillede fra 22. november 2026 radius 741,5 pixels, og efemeriden giver 737–741 pixels for den aften.

For hvert billede har jeg fundet Månens centrum og radius fra den lyse rand og drejningen af billedet ud fra 10 kendte kratere. Tilpasningen passer med 2 pixels i middel. Ud fra tidspunktet har jeg beregnet Solens stilling set fra Månen med IAU's rotationsmodel for Månen og en efemeride for Sol og Måne. Det giver Solens colongitude, og dermed solhøjden for hvert eneste punkt.



26. marts 2026. Solen står op over Apenninerne, Archimedes og Ptolemaeus-kæden.

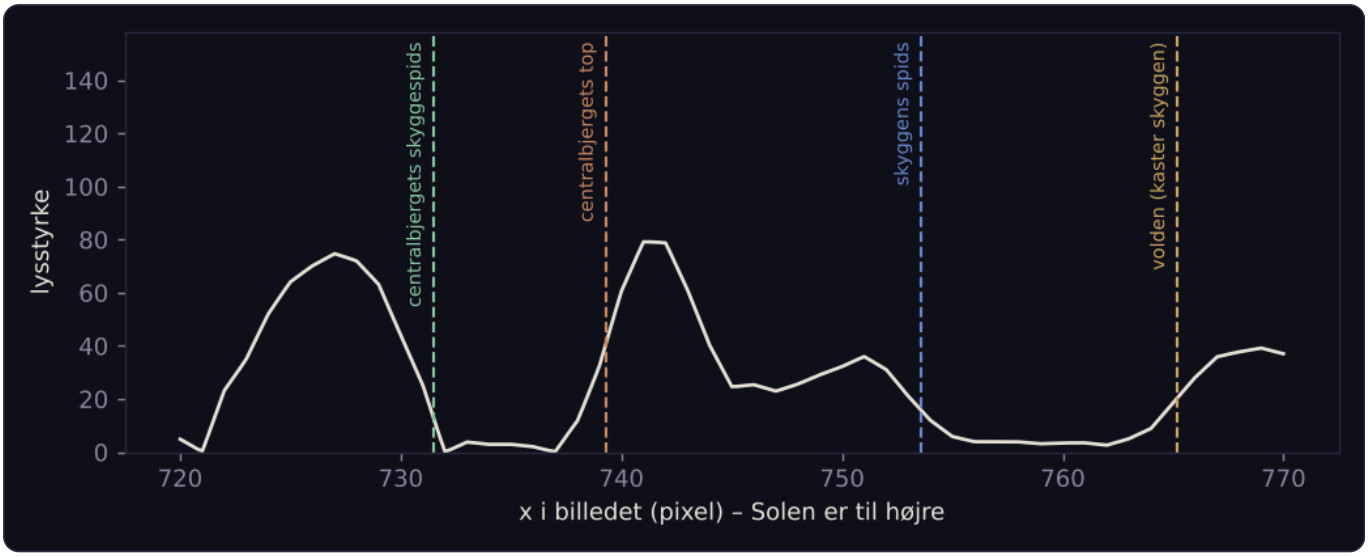


25. maj 2026. Terminatoren går lige gennem Copernicus.

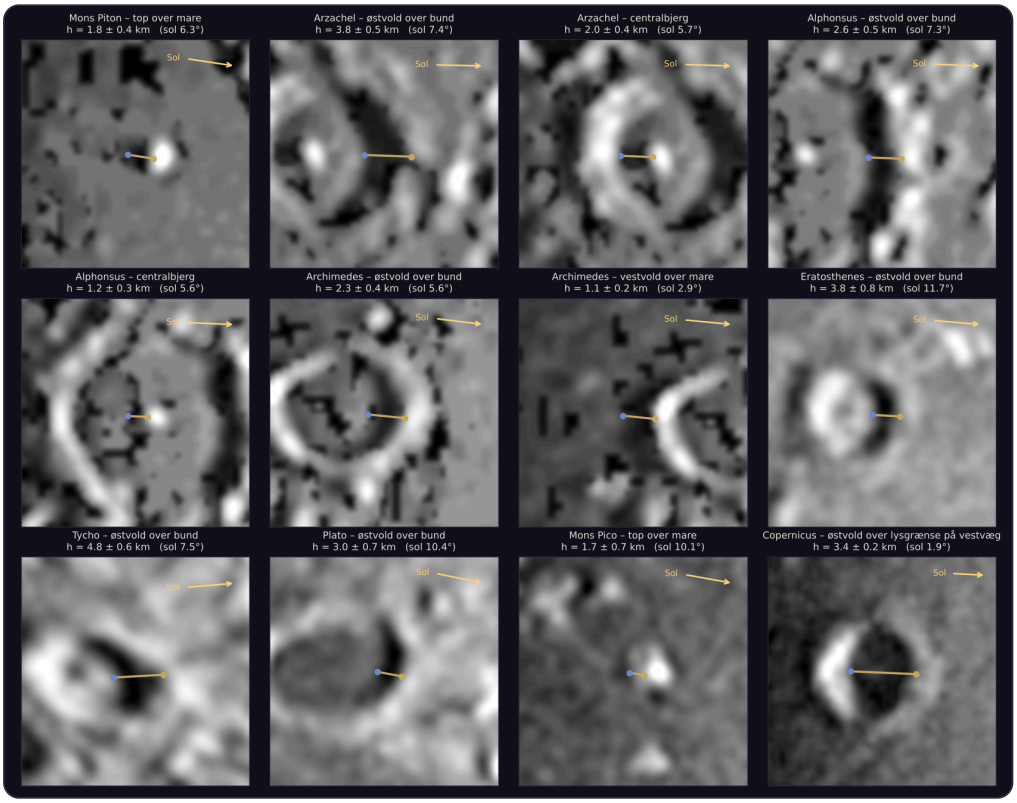
SÅDAN MÅLES EN SKYGGE

Jeg lægger en linje gennem objektet i Solens retning og aflæser lysstyrken langs den. Skyggen begynder, hvor den belyste skråning slutter, og den ender, hvor lysstyrken er

steget halvvejs op til den belyste bund. Begge punkter omregnes til selenografiske koordinater, og højden følger af geometrien.



Lysstyrken gennem Arzachel langs Solens retning. Østvolden kaster en skygge 11,6 pixels ind over bunden, og centralbjerget kaster en på 7,8 pixels.



Alle tolv målinger. Guld: punktet der kaster skyggen. Blå: skyggens spids. Pilen viser retningen mod Solen.

RESULTATER

OBJEKT	HVAD ER MÅLT	SOLHØJDE VED SPIDSEN	SKYGGE	MÅLT HØJDE	LITTERATUR	LRO
Mons Piton	top over Mare Imbrium	6,3°	15,5 km	1,8 ± 0,4 km	2,25 km	1,9 km
Arzachel	østvold over bunden	7,4°	27,5 km	3,8 ± 0,5 km	dybde 3,6 km	4,0 km
Arzachel	centralbjerg	5,7°	18,6 km	2,0 ± 0,4 km	1,5–2,1 km	1,7 km
Alphonsus	østvold over bunden	7,3°	19,2 km	2,6 ± 0,5 km	dybde 2,7 km	2,4 km
Alphonsus	centralbjerg	5,6°	11,7 km	1,2 ± 0,3 km	1,5–2,2 km	1,1 km
Archimedes	østvold over bunden	5,6°	21,8 km	2,3 ± 0,4 km	dybde ca. 2,1 km	2,0 km
Archimedes	vestvold over mare	2,9°	19,1 km	1,1 ± 0,2 km	–	1,1 km
Eratosthenes	østvold over bunden	11,7°	17,9 km	3,8 ± 0,8 km	dybde 3,4 km	3,1 km
Tycho	østvold over bunden	7,5°	33,6 km	4,8 ± 0,6 km	dybde 4,7 km	4,7 km
Plato	østvold over bunden	10,4°	16,2 km	3,0 ± 0,7 km	1,0–2,0 km	2,0 km
Mons Pico	top over Mare Imbrium	10,1°	9,6 km	1,7 ± 0,7 km	2,4 km	2,4 km

Copernicus	østvold over lysgrænsen på vestvæggen	1,9°	65 km	≥ 3,4 ± 0,2 km	dybde 3,8 km	3,1 km

Usikkerheden svarer til at flytte hvert endepunkt af skyggen én pixel. Kraterdybderne rammer de publicerede værdier inden for usikkerheden: Arzachel, Alphonsus, Archimedes, Eratosthenes og Tycho. Copernicus kan kun give en nedre grænse, for med Solen kun 1,9° over horisonten ligger hele bunden i skygge, og lyset begynder først oppe på vestvæggen. Til gengæld fanger centralbjergene sollyset midt i det mørke krater.

Er de små bjerge for lave? Mons Piton og Alphonsus' centralbjerg ser for lave ud i forhold til litteraturværdierne, men LRO-profilerne nedenfor viser, at de passer fint, når højden regnes fra skyggens spids. Litteraturværdierne er regnet fra en anden basis. Kun Mons Pico kommer ud for lav. Dens skygge er under fire pixels lang, og luftens uro udtværer billedet over 2–3 pixels, så den lyse solside »løber ind« i skyggen og gør den kortere. Lange skygger, som kraternes, påvirkes langt mindre.

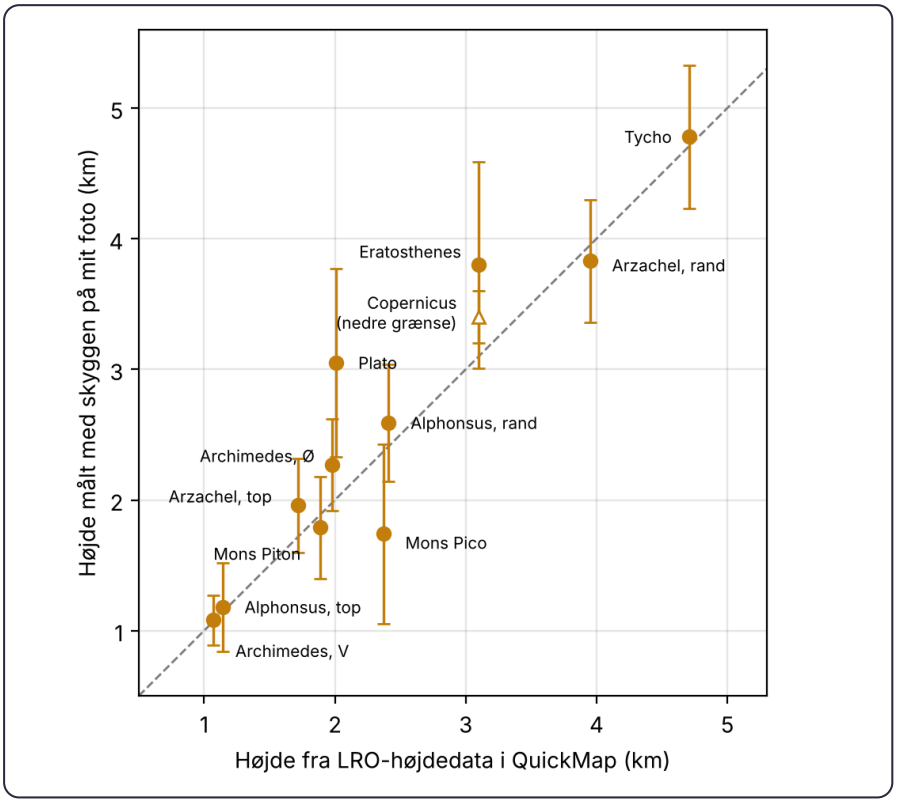
Andre fejlkilder: billederne er efterbehandlet med skarphedsfilter, som flytter kanter en smule. Tidspunktet er vigtigt: en time forskel flytter solhøjden 0,5° og ændrer højderne med 5–10 %. Tidsstemplerne i eVscope2's billedfiler er i UT. Unistellar-appen viser det samme billede med dansk tid, og billedernes drejning passer med Månens parallaktiske vinkel på UT-tidspunktet. En tidligere udgave af siden regnede tidsstemplerne som dansk tid, hvilket gav 4–8 % for lave højder.

KONTROL MED NASA'S HØJDEDATA

LROC QuickMap er et gratis kort over Månen, der kører direkte i browseren uden installation eller login. Det bygger på data fra NASA's Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO). Tegner man en linje hen over et krater, viser QuickMap højdeprofilen langs linjen ud fra højdemodellen SLDEM2015, med et punkt for hver 40–80 m. Jeg har tegnet en linje langs Solens retning gennem hver af mine skygger og aflæst højden af randens eller toppens højeste punkt og højden af terrænet dér, hvor skyggen ender. Forskellen er netop den højde, skyggemetoden måler; den står i kolonnen LRO i tabellen ovenfor. Kalibreringen af billederne kan forskyde punkterne et par pixels langs Solens retning, så jeg har brugt det højeste punkt i profilen og regnet skyggens længde derfra.

Ti af de tolv skyggehøjder ligger inden for én standardafvigelse fra LRO-værdien. Plato ligger 1,4 og Copernicus 1,5 standardafvigelser for højt. Profilerne viser også, at Mons Piton og Alphonsus' centralbjerg ikke er for lave målt fra skyggens spids: LRO giver 1,9 og 1,1 km, ligesom mine skygger. Forskellen til litteraturværdierne skyldes, at de regnes fra en

anden basis. Kun Mons Pico, hvis skygge er under fire pixels lang, kommer ud for lav. For Copernicus giver LRO-profilen 3,1 km fra østranden ned til stedet 65 km længere mod vest, hvor min skygge ender. Mit tal på 3,4 km ligger 1,5 standardafvigelser højere. At kraterets samlede dybde er 3,8 km, skyldes, at skyggens spids ikke når ned til det dybeste sted.



Højderne målt med skyggemetoden på mine fotos sammenlignet med højdeprofiler fra NASA's LRO-data i QuickMap. Fejllinjerne svarer til at flytte hvert endepunkt af skyggen én pixel. Den stiplede linje viser fuld overensstemmelse.

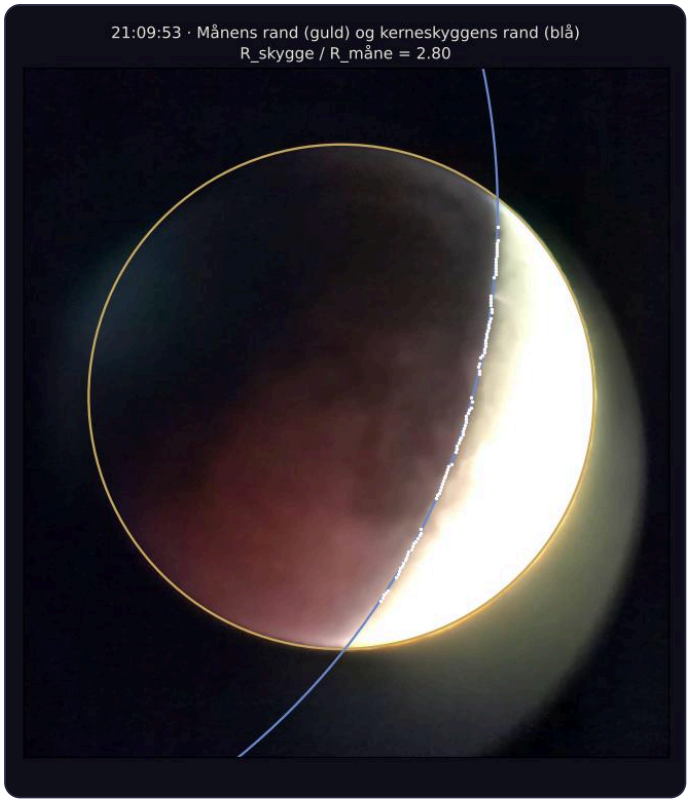
Elever uden eget teleskop kan lave øvelsen på andres billeder, for eksempel mine på astrofotos-siden, hvor tidspunktet står i UT i filnavnet. De måler skyggens længde i pixels, finder billedets skala ud fra Månens diameter, slår colongituden op i Virtual Moon Atlas og regner højden ud. Bagefter tegner de den samme linje i QuickMap og ser, hvor tæt de kom på LRO's profil.



To af mine eVscope2-billeder, som eleverne kan måle på. Til venstre tiltagende Måne 28. marts 2026 kl. 23:36 UT med Copernicus lige ved morgenterminatoren. Til højre aftagende Måne 2. oktober 2026 kl. 21:11 UT, hvor Solen går ned, og skyggerne derfor falder den modsatte vej.

2 · Jordens skygge og Månens afstand

Under den totale måneformørkelse 7. september 2025 fotograferede jeg Månen gennem mit Celestron AstroFi 6 med mobilen holdt op til okularet, lige da Månen var på vej ud af Jordens kerneskygge. Mit eVscope2 kunne ikke bruges den aften, for himlen var for lys til, at det kunne finde stjerner at orientere sig efter. Kanten af skyggen er et stykke af en cirkel, og dens krumning fortæller, hvor stor Jordens skygge er i forhold til Månen.



Kl. 21:09:53. En cirkel er tilpasset Månens rand (guld) og en anden til kanten af kerneskyggen (blå, de hvide punkter er de fundne kantpunkter).

Skyggens radius målt i månens radier er

$$k = R_{skygge} / R_{Måne} = 2{,}76 \pm 0{,}08$$

Tallet er gennemsnittet af ni tilpasninger med forskellig udglatning og afgrænsning (2,64–2,86). Ren geometri giver 2,70 den aften, og med de 2 %, Jordens atmosfære gør skyggen større (Danjons regel), bliver det 2,75.

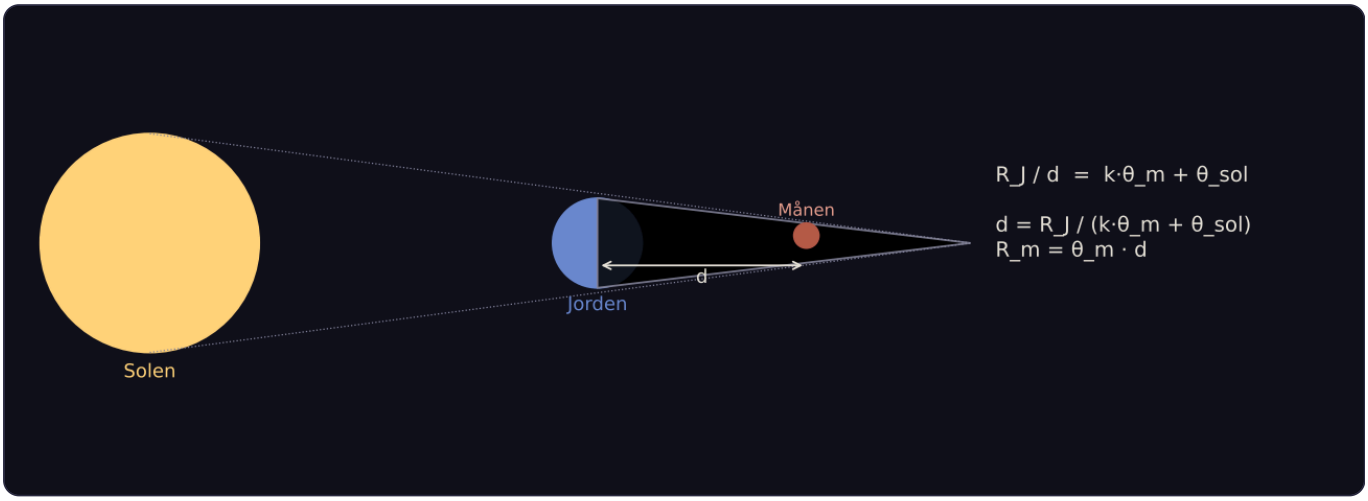


De fire billeder drejet ens ud fra mareområderne. s er afstanden fra Månens centrum til skyggens centrum i månens radier. Den er målt ud fra, hvor skyggekanten krydser aksen, og sammenlignet med efemeriden. Fra 20:53 til 21:10 flytter skyggen sig 0,44 månens radier (efemeride 0,48).

ARISTARCHS OG HIPPARCHS REGNESTYKKE

Jordens skygge er en kegle, fordi Solen er større end Jorden. Ved Månens afstand d er keglens vinkelradius Jordens radius set fra Månen minus Solens vinkelradius:

$$R_J / d = k \cdot \theta_m + \theta_{sol}$$



Skyggekeglen (ikke målfast).

Her er θ_m Månens vinkelradius og θ_{sol} = 0,265° Solens. Månens vinkeldiameter den aften kan aflæses i Stellarium: 32,43′ kl. 21:07, altså θ_m = 0,2703°. Med R_J = 6371 km giver det d = 361 000 ± 8 000 km. Men den målte k indeholder atmosfærens 2 % (Danjons regel), mens formlen gælder den geometriske skygge. Deler man k med 1,02, bliver resultatet (den sande afstand fra Jordens centrum var ca. 369 600 km; Stellarium angiver 368 478 km, men det er afstanden fra Djursland)

AFSTAND TIL MÅNEN

366 500 km

± 8 000 km · sand: ca. 369 600 km

MÅNENS RADIUS

1730 km

± 37 km · rigtig værdi: 1737 km

SKYGGENS RADIUS

2,76 R_m

± 0,08 · forventet 2,75

Aristarch kunne ikke måle Månens vinkelstørrelse præcist, men han vidste, at Sol og Måne ser lige store ud. Sætter man $\theta_{sol} = \theta_m$, bliver vinklerne helt uden betydning for Månens

radius:

$$R_m = R_J / (k + 1) = 6371\ km / 3{,}76 \approx 1690\ km$$

Det er Aristarchs og Hipparchs resultat i moderne form: Månen er knap en fjerdedel af Jorden. Med den klassiske vinkelradius 0,25° giver samme regnestykke en afstand på 383 000 km, tæt på middelafstanden 384 400 km. Mine eVscope2-billeder fra andre nætter giver i gennemsnit $\theta_m = 0{,}2657°$, men det er ikke godt nok: Månens afstand varierer med ±5 %, og den aften var Månen tæt på perigæum.

Fejlkilder. Kanten af kerneskyggen er ikke skarp, fordi halvskyggen og lys brudt i Jordens atmosfære glider over i den. Jeg har brugt den stejleste stigning i lysstyrken, og fordi den lyse del er overeksponeret, ligger kanten måske lidt for langt ude, hvilket gør k op til 0,04 for stor. Skyggebuen dækker kun en del af Månen, og det er krumningen af den, der bestemmer k. Det er den største enkelte usikkerhed.

KONTROL MED STELLARIUM

Jeg har sammenlignet med skærmbilleder af den samme formørkelse fra planetarieprogrammet Stellarium. Stellarium placerer Jordens skygge rigtigt, men tegner kanten som en blød overgang, der krummer alt for meget. Cirkler tilpasset kanten giver k ≈ 1,0–1,6, så krumningen kan ikke bruges. Kantens *position* passer derimod. Er s afstanden fra Månens centrum til skyggens centrum, regnet ud fra Månens og Solens koordinater, og x kantens afstand fra Månens centrum, regnet positiv mod den lyse side og negativ mod den mørke, er

$$k = s + x$$

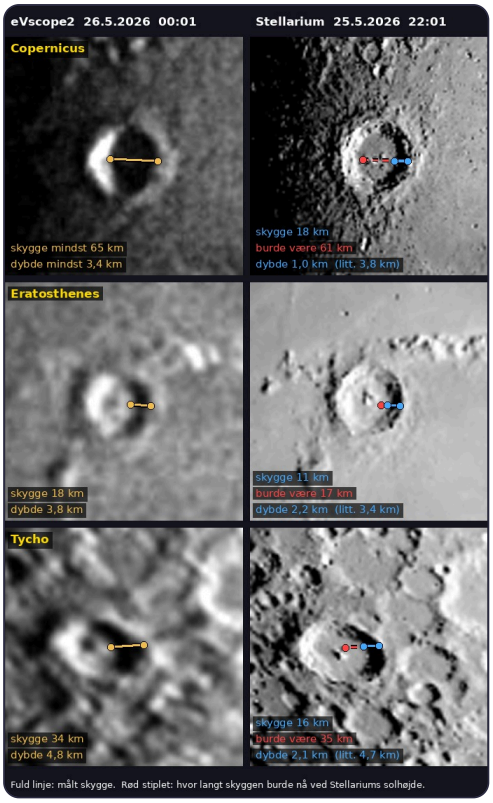
TID (CEST)	S	X	K
21:07:44	2,17	+0,56	2,74
21:25:44	2,74	−0,03	2,71
21:45:44	3,38	ca. −0,6	ca. 2,78

Det er en god elevøvelse uden teleskop: aflæs RA og Dec for Månen og Solen i Stellarium, læg 12 timer til Solens RA og skift fortegn på dens Dec for at finde skyggens centrum, og regn vinkelafstanden ud med den sfæriske cosinusrelation. Til skyggehøjderne er Stellarium derimod ikke pålideligt. Stellarium på mobilen tegner bjergenes og kraternes skygger ud fra højdedata, men skyggerne er for korte. Jeg har sammenlignet mit eVscope2-

billede fra 26. maj 2026 kl. 00:01 dansk sommertid (25. maj kl. 22:01 UT) med Stellarium sat til 25. maj kl. 22:01 dansk sommertid og målt skyggerne på samme måde. Stellarium-billedet er altså 2 timer ældre end fotoet, men hver skygge er sammenlignet med solhøjden på sit eget tidspunkt. To timer tidligere stod Solen lavere, så Stellariums skygger burde endda have været længere end fotoets:

OBJEKT	STELLARIUM	MIT FOTO	LITTERATUR
Copernicus	1,0 km	≥ 3,4 km	3,8 km
Eratosthenes	2,2 km	3,8 km	3,4 km
Tycho	2,1 km	4,8 km	4,7 km
Plato	0,9 km	3,0 km	1,0–2,0 km
Mons Pico	1,5 km	1,7 km	2,4 km

For kraterne med en sikker litteraturværdi giver Stellarium kun 27–66 % af den rigtige højde, i gennemsnit omkring det halve. Kun ved Mons Pico er Stellarium og fotoet enige, og der er begge for lave, fordi skyggen er under fire pixels lang på fotoet. En sandsynlig forklaring er, at Stellarium regner skyggerne ud fra et forudberegnet højdekort i begrænset opløsning, som runder de skarpe kraterrande af. Version 23.1 af Stellarium fik netop en mulighed for at gøre skyggerne på Månen skarpere med supersampling.



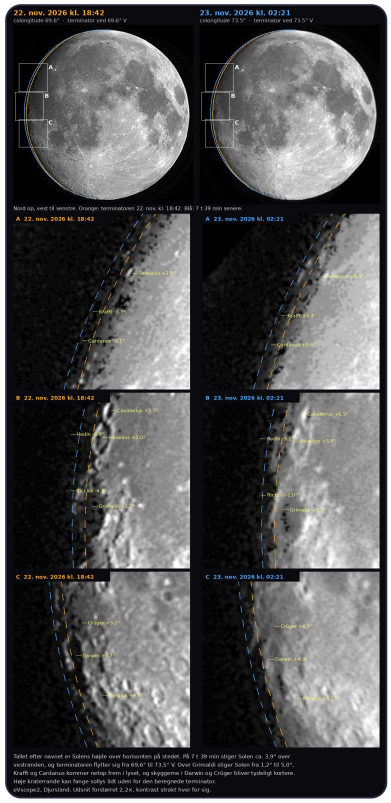
Mit eVscope2-billede 26. maj 2026 kl. 00:01 dansk sommertid (venstre) og Stellarium 25. maj kl. 22:01 (højre). Fuld linje: den målte skygge. Rød stiplet linje: hvor langt skyggen burde nå ved Stellariums solhøjde ud fra kraterets kendte dybde. På fotoet ligger hele bunden af Copernicus i skygge, i Stellarium kun en smal bue.

Tidspunktet for sammenligningen var givet af mit foto. Den 25. maj stod Månen lidt over første kvarter, og Copernicus, Eratosthenes og Tycho lå nær terminatoren, hvor skyggerne er lange. At himlen er lys en sommeraften, betyder næsten intet, for Månen er langt lysere end tusmørkehimlen. Det, der tæller, er Solens højde ved krateret på Månen, ikke hvor mørkt der er hos os. I Stellarium kan man slå atmosfæren fra (tasten A), så himlen bliver sort, også ved tusmørke. Til undervisningen er efterårs- og vinteraftener alligevel de bedste: Månen ved første kvarter står da højt på en mørk himmel tidligt på aftenen.

3 · Terminatoren vandrer

Terminatoren er grænsen mellem dag og nat på Månen. Den flytter sig ca. 0,5° i selenografisk længde i timen, fordi Månen drejer én gang rundt i forhold til Solen på 29,5 døgn. Det kan man se på to billeder taget med nogle timers mellemrum. Mine to eVscope2-billeder er taget 22. november 2026 kl. 18:42 og 23. november kl. 02:21 dansk tid, 7 t 39 min senere. Månen var da 12 dage gammel, så terminatoren lå helt ude ved vestranden. Colongituden steg fra 69,6° til 73,5°, og terminatoren flyttede sig tilsvarende fra 69,6° til 73,5° vest.

På hele skiven er flytningen kun en smal stribe ved randen, så figuren viser også tre forstørrede udsnit. Tallet efter hvert krater er Solens højde over horisonten lige dér, regnet ud fra Månens og Solens stilling. Krafft og Cardanus går fra nat (−3,3° og −3,1°) til solopgang. Over Grimaldi stiger Solen fra 1,2° til 5,0°, og over Darwin fra 0,7° til 4,3°. Skyggerne bag kraterrandene bliver tydeligt kortere. Høje rande kan fange sollys lidt uden for den beregnede terminator, ligesom bjergtoppe på Jorden er solbeskinnede, før solen står op i dalen.



Terminatoren 22. november 2026 kl. 18:42 (orange) og 7 t 39 min senere (blå). Billederne er drejet, så Månens nordpol vender op. Udsnittene er forstørret 2,2 gange, og kontrasten er strakt hver for sig, så lysstyrken kan ikke sammenlignes direkte.

Det er en god elevøvelse: tag to billeder samme nat, find colongituden for begge tidspunkter i Stellarium eller Virtual Moon Atlas, og se, hvilke kratere der er kommet frem i lyset. Med skyggemetoden fra afsnit 1 kan man også se, at skyggerne bliver kortere, når Solen stiger.

4 · Vær forsigtig med Stellarium

Stellarium er et fremragende program til at finde ud af, hvor og hvornår noget kan ses, og dets koordinater er præcise. Men billedet på skærmen er en tegning, ikke et fotografi, og det skal man huske, når eleverne vil måle på det:

- **Skyggerne er for korte.** Stellarium tegner Månens skygger ud fra et højdekort i begrænset opløsning. Sammenlignet med mit foto fra 25.–26. maj var skyggerne af Copernicus, Eratosthenes og Tycho i gennemsnit kun omkring halvt så lange, som de skal være (afsnit 2). Højder målt på Stellarium bliver derfor for små.
- **Kanten af Jordens skygge krummer forkert.** Under formørkelsen ligger skyggekanten det rigtige sted, men den er tegnet som en blød overgang, der krummer alt for meget. Cirkler tilpasset kanten giver k ≈ 1,0–1,6 i stedet for ca. 2,7. Brug kantens position og Stellariums koordinater, ikke kantens krumning.
- **Afstanden er fra dit eget sted.** Stellarium viser afstanden fra observationsstedet (topocentrisk), ikke fra Jordens centrum. Den aften var forskellen ca. 1 100 km. Formlerne for Aristarchs metode giver afstanden fra Jordens centrum.
- **Tjek tid og sted.** Stellarium regner med den tidszone og det sted, der er indstillet. En times fejl flytter terminatoren ca. 0,5° og ændrer solhøjden tilsvarende. Tjek også tidsstemplerne på dine egne billeder: eVscope2 gemmer dem i UT, og det opdagede jeg først, da et skærmbillede fra Stellarium kl. 18:42 passede præcis med et foto stemplet 17:42.
- **Himlens lysstyrke er simuleret.** I tusmørke ser himlen lys og udvasket ud, som den gør i virkeligheden. Slå atmosfæren fra (tasten A), hvis man vil se Månen tydeligt.
- **Mobil og computer kan tegne forskelligt.** Udgaverne på mobil og computer har ikke altid de samme indstillinger og teksturer. Mine sammenligninger er lavet med Stellarium på mobilen.

Kort sagt: brug Stellarium til tal (koordinater, tidspunkter, vinkelstørrelser, colongitude) og rigtige fotografier til at måle skygger og former.

Michael H. Grant · lektor emeritus i fysik og matematik · november 2026
Kilder til litteraturværdier: The Moon Wiki (the-moon.us), Wikipedia, et Cambridge-måneatlas og Margot m.fl. (1999) for Tycho. Beregninger: egne Python-programmer med astropy og IAU 2009-modellen for Månens rotation.