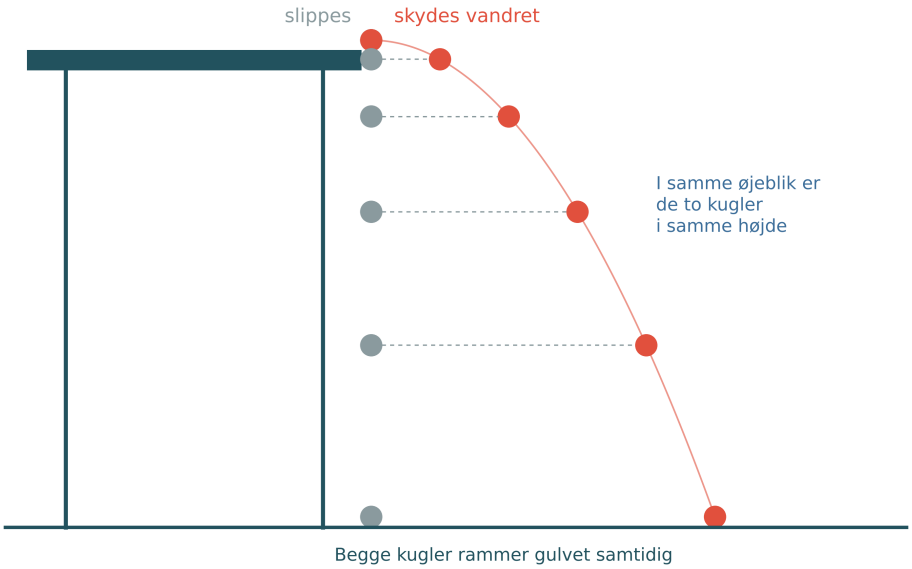
Satellitberegning med kun Galileos faldelov

En satellit er en sten, der falder hele tiden – men aldrig rammer

Michael Howard Grant, lektor emeritus i fysik og matematik, Grenaa Gymnasium

To små stålkugler ligger side om side ved kanten af et bord. I samme øjeblik som den ene skydes vandret ud over kanten, slippes den anden og falder lodret ned. De rammer gulvet samtidig; man hører kun ét klik. Mange fysiklærere har vist forsøget, og det overrasker eleverne hver gang.



Figur 1: Den ene kugle slippes, den anden skydes vandret. Kuglerne er vist med lige lange tidsrum imellem. Til hvert tidspunkt er de i samme højde, og de rammer gulvet samtidig.

Forsøget viser den indsigt, Galileo formulerede i *Discorsi* (1638): En vandret kastet genstand bevæger sig jævnt fremad og falder samtidig præcis som en genstand, der blot slippes. Den vandrette fart ændrer ikke ved faldet. Det er denne iagttagelse, sammen med at Jorden krummer, der ligger til grund for beregningen af en satellits fart.

Hvor hurtigt skal en satellit flyve for at holde sig i bane lige over Jordens overflade? Svaret, ca. 7,9 km/s, kan elever finde med kun to redskaber: Galileos faldelov $s = \frac{1}{2}gt^2$ og Pythagoras' sætning. Der er ikke brug for Newtons gravitationslov, centripetalacceleration eller differentialregning. Regnestykket kræver blot en strand, en kikkert og en stolpe ude på havet.

Undervejs sker der noget, som eleverne ikke venter: Den højde, man starter med, forsvinder af resultatet. Tilbage står $v = \sqrt{gR}$, og dermed er man nået frem til Newtons berømte tankeeksperiment med kanonen på bjerget.

Hvorfor ikke bare Newtons tyngdelov?

Da jeg underviste i fysik i 1.g, regnede vi satellitbaner på den sædvanlige måde: Man sætter tyngdekraften GMm/r^2 lig med mv^2/r og isolerer v. Eleverne fik det rigtige tal. Men mange troede bagefter stadig, at der ikke er tyngdekraft i rummet, og at astronauterne

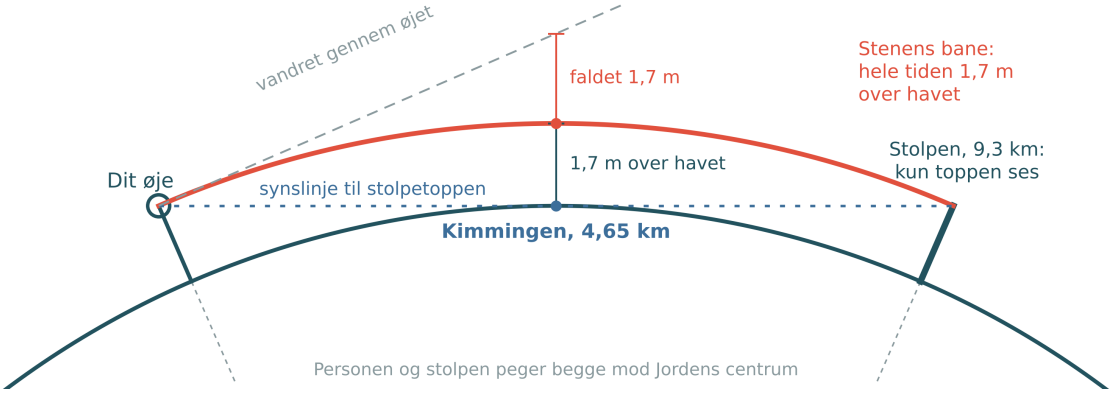
svæver, fordi de er kommet »ud over« tyngdekraften. Formlen giver svaret, men den viser ikke, hvad der sker.

Med Galileos faldelov er det omvendt. Her er faldet selve udgangspunktet: Stenen falder hele tiden, med den samme tyngdeacceleration som på stranden. Den rammer bare aldrig, fordi Jorden krummer sig væk under den. Når eleverne selv har regnet det ud, er det svært at bevare forestillingen om vægtløshed som fravær af tyngde. En satellit er i frit fald, og det er astronauterne indeni også.

Ved strandkanten

Du står ved strandkanten med øjnene 1,7 m over vandet. Gennem en kikkert kan du lige se toppen af en stolpe ude på havet. Stolpen er også 1,7 m høj. Synslinjen fra dit øje til stolpetoppen strejfer havet ét sted, nemlig ved kimmingen. Fordi øjet og stolpetoppen er lige højt over havet, ligger kimmingen af symmetri præcis midt mellem jer (figur 2). Bemærk, at du og stolpen ikke står parallelt: I peger begge ind mod Jordens centrum.

Forestil dig nu, at du skyder en sten vandret afsted fra øjenhøjde. Når den når ud til kimmingen, har den faldet et stykke. Men havet ligger også lavere dér, fordi Jorden krummer. Hvis stenen når kimmingen på præcis den tid, det tager at falde 1,7 m, er havet krummet 1,7 m ned samtidig, og stenen er stadig 1,7 m over havet. Ude ved stolpen, dobbelt så langt væk, har stenen faldet 6,8 m, og havet er krummet 6,8 m ned. Stenen rammer toppen af stolpen.



Figur 2: Synslinjen fra øjet til stolpetoppen rører havet ved kimmingen, midt imellem. Stenen er hele tiden 1,7 m over havet og rammer stolpetoppen. Person og stolpe peger mod Jordens centrum. Krumningen er stærkt overdrevet.

Så kan det samme gentage sig ved næste stolpe og den næste, hele vejen rundt. Stenen er blevet en satellit. Vi ser bort fra luftmodstanden, som er næsten væk i rummet.

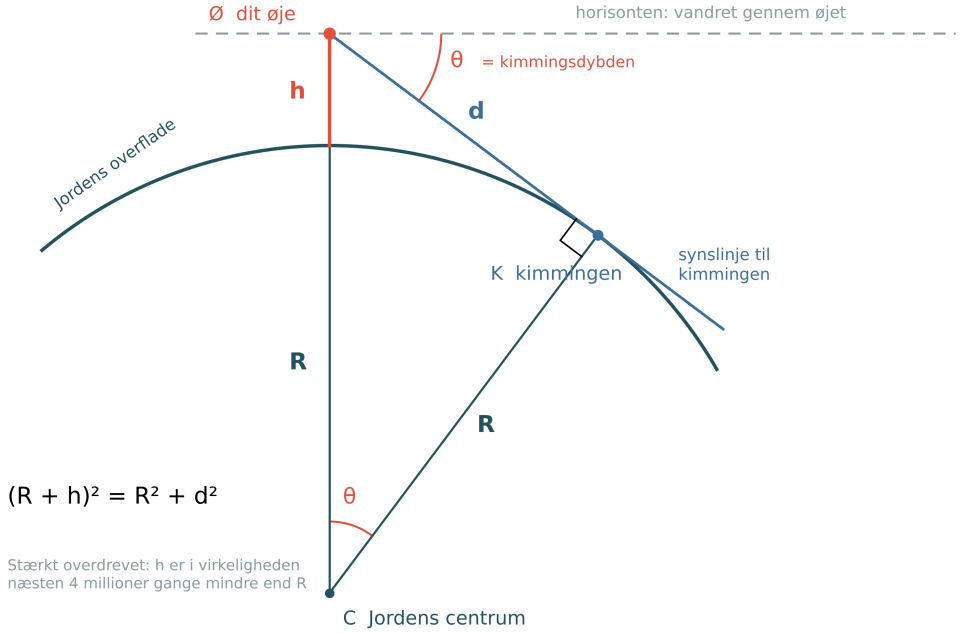
Regnestykket

Faldtiden. Det lodrette fald afhænger ikke af den vandrette fart, som forsøget med de to kugler viser. Med $h = 1{,}7$ m og $g = 9{,}82$ m/s^2:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}7\ \text{m}}{9{,}82\ \text{m/s}^2}} \approx 0{,}588\ \text{s}$$

Afstanden til kimmingen. Jordens centrum C, øjet Ø og kimmingspunktet K danner en retvinklet trekant, fordi synslinjen ØK tangerer Jorden i K. Pythagoras giver $(R + h)^2 = R^2 + d^2$, altså $d^2 = 2Rh + h^2$. Med $R = 6371$ km er h^2 forsvindende i forhold til $2Rh$:

$$d \approx \sqrt{2Rh} = \sqrt{2 \cdot 6\,371\,000\ \text{m} \cdot 1{,}7\ \text{m}} \approx 4654\ \text{m}$$



Figur 3: Synslinjen fra øjet Ø rører Jorden i kimmingen K og står vinkelret på radius CK, så Pythagoras giver $(R + h)^2 = R^2 + d^2$. Kimmingen ligger vinklen θ under horisonten.

Synslinjen rører havet i kimmingen K og står dér vinkelret på radius CK. Det er den rette vinkel, Pythagoras skal bruge. Af symmetri står stolpen lige så langt på den anden side af K, altså $2d \approx 9{,}3$ km fra dig.

Kimming og horisont. I daglig tale bruges ordene om det samme, men i fysik, astronomi og navigation skelner man. *Horisonten* er det vandrette plan gennem øjet, den retning et vaterpas viser. *Kimmingen* er den linje, hvor himmel og hav ser ud til at mødes, altså der hvor synslinjen netop rører havoverfladen. Fordi Jorden krummer, ligger kimmingen en smule under horisonten. Vinklen θ kaldes kimmingsdybden, og som figur 3 viser, er den lig med vinklen ved Jordens centrum: $\theta \approx d/R = 4654/6\,371\,000 \approx 0{,}00073$ rad, ca. 2,5 bueminutter. Navigatører, der måler Solens højde over kimmingen med en sekstant, skal rette for netop denne vinkel. I praksis er den lidt mindre, fordi luften bøjer lyset.

Farten. Stenen skal nå 4,65 km på 0,588 s:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{4654\ \text{m}}{0{,}588\ \text{s}} \approx 7910\ \text{m/s} \approx 7{,}9\ \text{km/s}$$

Det er ca. 28 500 km/t. En tur rundt om Jorden, $2\pi R \approx 40\,030$ km, tager så ca. 5060 s eller 84 minutter. Den Internationale Rumstation, der flyver ca. 400 km oppe, hvor tyngden er lidt svagere, bruger ca. 92 minutter med ca. 7,7 km/s.

Kontrol ved stolpen. Ved stolpen, $2d \approx 9{,}3$ km ude, er havet krummet $(2d)^2/(2R) = 4h \approx 6{,}8$ m ned, og stolpetoppen ligger $4h$ under øjet. At falde $4h$ tager tiden $\sqrt{2 \cdot 4h/g} = 2t \approx 1{,}18$ s, og farten bliver $2d/2t = d/t \approx 7{,}9$ km/s. Den samme fart: Stenen rammer toppen af alle stolper på 1,7 m langs vejen.

Hvorfor højden forsvinder

Sætter man bogstaver ind i stedet for tal, sker der noget smukt:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{\sqrt{2Rh}}{\sqrt{2h/g}} = \sqrt{gR}$$

h går ud. Står man på en klint med øjnene 10 m oppe, falder stenen i 1,43 s, men kimmingen ligger også 11,3 km væk, og farten bliver den samme. Både tiden og afstanden vokser med $\sqrt{h}$.

Det bliver endnu klarere, hvis man lader h være vilkårlig lille. På tiden t falder stenen $\frac{1}{2}gt^2$. Samtidig er den nået afstanden vt ud, hvor jordoverfladen tæt på et punkt er krummet $(vt)^2/(2R)$ ned. Jorden er altså lokalt en parabel, ligesom stenens bane. Bliver stenen i samme højde, er de to parabler ens:

$$\tfrac{1}{2}gt^2 = \frac{(vt)^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{v^2}{R}$$

Det er formlen for centripetalaccelerationen, som Huygens og Newton fandt i 1600-tallet. Strandkanten giver altså en elementær udledning af $a = v^2/R$, hvor tyngdeaccelerationen netop spiller rollen som centripetalacceleration.

To små forbehold kan nævnes for de skarpe elever. Den g, vi måler i Danmark, er en anelse mindre end den rene tyngdekraft, fordi Jorden roterer, men forskellen er under en halv procent. Og en raket, der skydes mod øst fra Djursland, får Jordens rotation forærende: ca. 0,26 km/s.

Fra stenen til Månen

Newton tegnede netop denne tanke: en kanon på et højt bjerg, der skyder kuglen hurtigere og hurtigere, indtil den falder hele vejen rundt om Jorden. Tegningen blev udgivet i 1728 i *A Treatise of the System of the World*. Det tog næsten 230 år, før Sputnik 1 gjorde det i praksis i 1957.

Newton tog også det næste skridt. Månen er ca. 60 jordradier borte. Hvis tyngden aftager med kvadratet på afstanden, er den der $60^2 = 3600$ gange svagere end ved jordoverfladen. På ét minut, altså 60 sekunder, skulle Månen da falde lige så langt mod Jorden, som et æble falder på ét sekund:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{9{,}82}{3600}\ \text{m/s}^2 \cdot (60\ \text{s})^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}82\ \text{m/s}^2 \cdot (1\ \text{s})^2 \approx 4{,}9\ \text{m}$$

Månens bane bekræfter det. Med afstanden 384 400 km og omløbstiden 27,3 døgn er dens fart ca. 1,02 km/s, og $v^2/r \approx 0{,}0027$ m/s^2, præcis $9{,}82/3600$. Den samme regel, som holder stenen i bane ved strandkanten, holder Månen i bane. Det var den indsigt, der gjorde æblet og Månen til ét problem.

I undervisningen

Regnestykket kan bruges på flere niveauer:

- **9.–10. klasse.** Der skal kun bruges faldeloven, Pythagoras og kvadratrødder, så det kan klares på en lektion. Det giver eleverne en følelse af, at de med skolematematik kan regne på rumfart.
- **Gymnasiet.** Den generelle udledning af $g = v^2/R$ kan bruges som indgang til cirkelbevægelse. Eleverne kan derefter regne på andre kloder: På Månen ($g = 1{,}62$ m/s^2, $R = 1737$ km) er farten ca. 1,7 km/s, og på Mars ($g = 3{,}71$ m/s^2, $R = 3390$ km) ca. 3,5 km/s. Med $g(r) = g \cdot (R/r)^2$ kan de også finde ISS' fart.

- **Ved vandet.** Lad eleverne måle deres øjenhøjde og regne ud, hvor langt væk kimmingen er. Med en kikkert kan de se skroget på et skib forsvinde bag kimmingen, før masten gør.
- **GeoGebra.** Tegn stenens parabel $y = h - gx^2/(2v^2)$ og Jordens cirkel. Træk i v og se, hvornår stenen følger jordoverfladen.

En god diskussion til sidst: Hvorfor er astronauterne på ISS vægtløse, når tyngden deroppe stadig er ca. 90 % af tyngden på Jorden? Svaret er, at de falder hele tiden, præcis som stenen.

Litteratur og videre læsning

Regnestykket findes med tegning, eksempler og opgaver med svar i kapitlet om parablen i min lærebog *Min matematikbog – Matematik for 9. og 10. klasse – fra ligning til sandsynlighed* (2026, ISBN 9798142991270), der kan købes på Amazon som paperback og e-bog.

På mit websted mhgfysik.dk findes gratis, interaktive sider om fysik, kemi, matematik og astronomi, som kan bruges direkte i undervisningen.

1. Galileo Galilei: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leiden 1638.
2. Isaac Newton: *A Treatise of the System of the World*. London 1728.
3. Michael H. Grant: *Min matematikbog – Matematik for 9. og 10. klasse – fra ligning til sandsynlighed*. 2026. ISBN 9798142991270.
4. Michael H. Grant: Natur, fysik, kemi og matematik. mhgfysik.dk

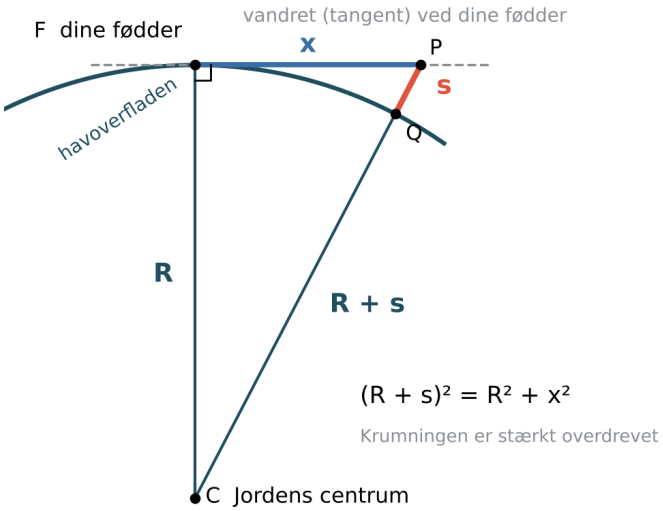
Michael Howard Grant er lektor emeritus i fysik og matematik fra Grenaa Gymnasium og civilingeniør fra DTU. Han skriver fra Sostrup på Djursland og kan kontaktes på michael.h.grant@gmail.com.

Bilag: Kontrol ved stolpen, trin for trin

I afsnittet *Kontrol ved stolpen* gik det hurtigt. Her er regnestykket udpenslet, så det kan bruges direkte i undervisningen, efterfulgt af et opgaveark med facit.

Hvor meget krummer havet?

Læg en vandret linje hen over havet ved dine fødder F. Den tangerer Jorden i F og står derfor vinkelret på radius CF. Gå afstanden x ud ad linjen til punktet P. Hvor langt ligger havet under P? Kald afstanden s.



Figur 4: Jordens centrum C, dine fødder F og punktet P danner en retvinklet trekant med kateterne R og x. Hypotenusen CP er havets radius R plus stykket s fra havet op til P.

Pythagoras giver

$$(R+s)^2 = R^2 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad 2Rs + s^2 = x^2.$$

Her er s nogle få meter og R over 6 millioner meter, så s^2 er forsvindende i forhold til $2Rs$:

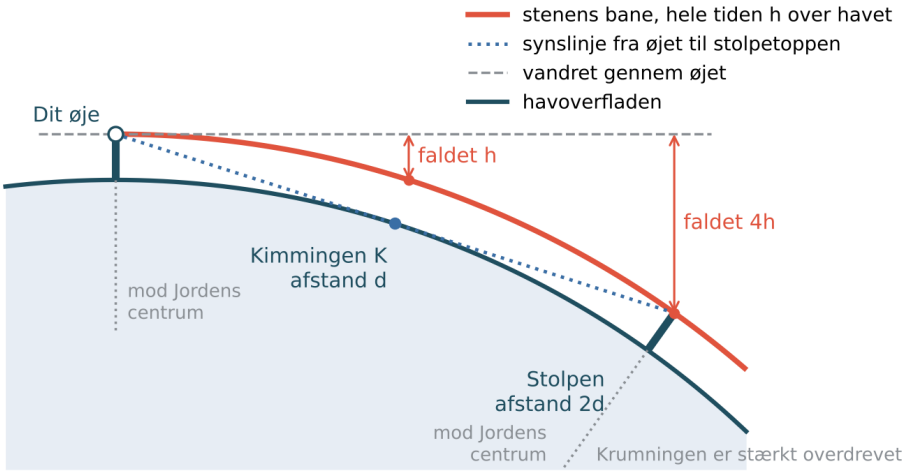
$$s \approx \frac{x^2}{2R}.$$

Det er den samme trekant som i figur 3, blot læst den anden vej:

- **Ved kimmingen**, $x = d$: $s = \dfrac{d^2}{2R} = \dfrac{2Rh}{2R} = h \approx 1{,}7$ m.
- **Ved stolpen**, $x = 2d$: $s = \dfrac{(2d)^2}{2R} = \dfrac{4 \cdot 2Rh}{2R} = 4h \approx 6{,}8$ m.

Øjet sidder h over havet ved dine fødder, og stolpetoppen sidder h over havet ved stolpen. De to h'er går ud med hinanden, så stolpetoppen ligger også $4h$ under den vandrette linje gennem øjet. Det er de $4h$, stenen skal falde.

Stenen og havet følges ad



Figur 5: Stenen er faldet h ved kimmingen og $4h$ ved stolpen. Havet krummer præcis lige så meget, så stenen er hele tiden h over havet. Synslinjen fra øjet til stolpetoppen rører havet ved kimmingen. Du og stolpen står ikke parallelt, men peger begge ind mod Jordens centrum. Krumningen er stærkt overdrevet.

Med $h = 1{,}7$ m, $R = 6\,371\,000$ m og $g = 9{,}82$ m/s^2:

Afstand	**i km**	**Havet krummet ned**	**Faldtid**	**Fart**
d	4,65	h = 1,7 m	t = 0,588 s	7,91 km/s
$2d$	9,31	$4h$ = 6,8 m	$2t$ = 1,177 s	7,91 km/s
$3d$	13,96	$9h$ = 15,3 m	$3t$ = 1,765 s	7,91 km/s
$4d$	18,62	$16h$ = 27,2 m	$4t$ = 2,354 s	7,91 km/s

En række regnet helt ud, afstanden $3d$:

- Afstand: $3 \cdot 4654$ m $= 13\,963$ m
- Havet krummet ned: $\dfrac{(13\,963\text{ m})^2}{2 \cdot 6\,371\,000\text{ m}} \approx 15{,}3\text{ m} = 9 \cdot 1{,}7\text{ m}$
- Faldtid for 15,3 m: $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 15{,}3\text{ m}}{9{,}82\text{ m/s}^2}} \approx 1{,}765\text{ s} = 3 \cdot 0{,}588\text{ s}$
- Fart: $\dfrac{13\,963\text{ m}}{1{,}765\text{ s}} \approx 7910$ m/s, den samme som før.

Hvorfor farten ikke ændrer sig. Er afstanden n gange større, krummer havet n^2 gange mere ned. At falde n^2 gange længere tager kun n gange længere tid, fordi faldet vokser med t^2. Farten bliver

$$v = \frac{n\,d}{n\,t} = \frac{d}{t},$$

uanset n. Kontrol: $\sqrt{gR} = \sqrt{9{,}82\text{ m/s}^2 \cdot 6\,371\,000\text{ m}} \approx 7910$ m/s.

Hvor overdrevet er tegningerne? Meget. I figur 4 og 5 er Jorden tegnet så lille, at krumningen kan ses. I figur 5 står personen og stolpen derfor tydeligt skævt

i forhold til hinanden. Begge peger ind mod Jordens centrum. I virkeligheden er vinklen ved Jordens centrum mellem dig og kimmingen kun

$$\theta \approx \frac{d}{R} = \frac{4654\ \text{m}}{6\,371\,000\ \text{m}} \approx 0{,}00073\ \text{rad} \approx 2{,}5\ \text{bueminutter},$$

og mellem dig og stolpen det dobbelte, ca. 5 bueminutter eller $\frac{1}{12}$ grad. Toppen af en 1,7 m høj stolpe hælder derfor kun $1{,}7\ \text{m} \cdot 0{,}00146 \approx 2{,}5$ mm i forhold til en stolpe, der stod parallelt med dig. I figur 5 er vinklen tegnet ca. 36°, altså mere end 400 gange for stor. Havets fald på 6,8 m over 9,3 km svarer til en hældning, man aldrig ville kunne se med det blotte øje. Derfor ser havet fladt ud, selv om det ikke er det.

For de skarpe elever: Fordi lodlinjerne ikke er helt parallelle, og x er målt langs tangenten frem for langs den krumme overflade, er regnestykket en tilnærmelse. Fejlen er langt under en millimeter på 9 km.

Opgaveark: Hvor hurtigt skal en satellit flyve?

Du skal kun bruge Galileos faldlov $s = \frac{1}{2}gt^2$ og Pythagoras. Brug $R = 6\,371\,000$ m og $g = 9{,}82$ m/s^2.

Opgave 1. Afstanden til kimmingen. Mål din egen øjenhøjde h i meter, eller brug $h = 1{,}7$ m. Beregn afstanden til kimmingen: $d = \sqrt{2Rh}$.

Opgave 2. Faldtiden. Hvor lang tid tager det en sten at falde højden h? Brug $t = \sqrt{2h/g}$.

Opgave 3. Farten. Stenen skal nå ud til kimmingen på netop den tid, det tager at falde h. Beregn $v = d/t$ i m/s og i km/t.

Opgave 4. Udfyld tabellen. Havet krummer $s = x^2/(2R)$ ned i afstanden x. Find faldtiden for netop det fald, og beregn farten x divideret med faldtiden.

Afstand	**i meter**	**Havet krummet ned**	**Faldtid**	**Fart**
d				
$2d$				
$3d$				
$4d$				

Opgave 5. Hvad ser du? Hvad lægger du mærke til i kolonnen med farten? Sammenlign tallene i kolonnen *Havet krummet ned* med h, og faldtiderne med t. Kan du forklare mønstret?

Opgave 6. På en klint. Gentag opgave 1–3 med øjnene 10 m over havet. Hvad sker der med afstanden, med faldtiden og med farten?

Opgave 7. En tur rundt om Jorden. Jordens omkreds er $2\pi R$. Hvor lang tid tager en tur rundt med den fart, du fandt? Sammenlign med ISS, som bruger ca. 92 minutter.

Ekstraopgaver for de hurtige.

a) Hvor hurtigt skal en satellit flyve lige over Månens overflade? Brug $g = 1{,}62$ m/s^2 og $R = 1737$ km.

b) Og over Mars? Brug $g = 3{,}71$ m/s^2 og $R = 3390$ km.

c) Astronauterne på ISS er vægtløse, selv om tyngden deroppe stadig er ca. 90 % af tyngden på Jorden. Hvorfor?

Facit

Opgave 1. $d = \sqrt{2 \cdot 6\,371\,000 \text{ m} \cdot 1{,}7 \text{ m}} = \sqrt{21\,661\,400 \text{ m}^2} \approx 4654 \text{ m} \approx 4{,}65 \text{ km}$.

Opgave 2. $t = \sqrt{2 \cdot 1{,}7 \text{ m} / 9{,}82 \text{ m/s}^2} = \sqrt{0{,}3462 \text{ s}^2} \approx 0{,}588 \text{ s}$.

Opgave 3. $v = 4654 \text{ m} / 0{,}588 \text{ s} \approx 7910 \text{ m/s} \approx 7{,}9 \text{ km/s} \approx 28\,500 \text{ km/t}$.

Opgave 4.

Afstand	i meter	Havet krummet ned	Faldtid	Fart
d	4654	1,7 m	0,588 s	7910 m/s
$2d$	9308	6,8 m	1,177 s	7910 m/s
$3d$	13 963	15,3 m	1,765 s	7910 m/s
$4d$	18 617	27,2 m	2,354 s	7910 m/s

Opgave 5. Farten er den samme i alle rækker. Faldene er h, $4h$, $9h$ og $16h$, altså 1^2, 2^2, 3^2 og 4^2 gange h, mens faldtiderne er t, $2t$, $3t$ og $4t$. Både fald og krumning vokser med kvadratet på afstanden, så stenen holder sig hele tiden h over havet. Farten er $\sqrt{gR}$.

Opgave 6. $d = \sqrt{2 \cdot 6\,371\,000 \cdot 10}$ m $\approx 11\,288$ m og $t = \sqrt{2 \cdot 10 / 9{,}82}$ s $\approx 1{,}427$ s. Både afstand og tid bliver større, men farten er stadig $11\,288 / 1{,}427 \approx 7910$ m/s. Højden går ud af regnestykket.

Opgave 7. $2\pi R \approx 40\,030$ km. Tiden er $40\,030 \text{ km} / 7{,}91 \text{ km/s} \approx 5060 \text{ s} \approx 84$ minutter. ISS flyver ca. 400 km oppe, hvor tyngden er lidt svagere, og bruger derfor lidt længere tid.

Ekstraopgaver.

a) Månen: $v = \sqrt{1{,}62 \cdot 1\,737\,000}$ m/s ≈ 1680 m/s $\approx 1{,}7$ km/s.

b) Mars: $v = \sqrt{3{,}71 \cdot 3\,390\,000}$ m/s ≈ 3550 m/s $\approx 3{,}5$ km/s.

c) Astronauterne og rumstationen falder hele tiden, præcis som stenen. Alt omkring dem falder med samme acceleration, så intet presser mod gulvet. Vægtløshed er frit fald, ikke fravær af tyngde.